REMARQUES GÉNÉRALES

SUR

L'APPLICATION DES PRINCIPES DE L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

AUX ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

PAR M. LE B^on^ FOURIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 9 mars 1829.

AVANT de traiter la question qui est l'objet principal de cette note, je discuterai, dans un premier article, une objection proposée plusieurs fois par M. Poisson, et que ce savant géomètre a reproduite récemment dans un écrit présenté à l'Académie.

Pour résoudre la question du mouvement de la chaleur dans le cylindre solide, j'ai appliqué un théorème d'analyse algébrique à l'équation transcendante propre à cette question. M. Poisson n'admet point cette conséquence. Il ne se borne pas à dire que l'on n'a point encore publié la démonstration de ce théorème, en faisant connaître qu'il s'applique aux équations transcendantes; il soutient que l'on arriverait à une conclusion fausse si l'on étendait cette proposition à l'équation exponentielle

$$(1) \qquad e^{x} - b\,e^{ax} = 0.$$

Il assure que, si l'on fait dans ce cas l'application littérale du théorème, on trouve que l'équation (1) et ses dérivées ont toutes leurs racines réelles; et comme il est évident que cette équation a des racines imaginaires, l'auteur en conclut que la proposition conduirait ici à une conséquence erronée. Je me propose 1° de discuter cette objection spéciale, et de montrer qu'elle n'a pas de fondement; 2° de prouver que le théorème dont il s'agit s'applique exactement à l'équation transcendante propre au cylindre.

En général, cette proposition, exprimée dans les termes dont je me suis servi, doit s'étendre aux équations transcendantes; en sorte que l'on commettrait une erreur grave en restreignant le théorème aux équations algébriques.

Dans ce premier article, qui se rapporte à l'équation citée (1), je montrerai que le théorème n'indique nullement que cette équation (1) n'a point de racines imaginaires. Au contraire, il fait connaître qu'elle n'est pas du nombre de celles qui réunissent les conditions que le théorème suppose, et qui distinguent les équations dont toutes les racines sont réelles.

M. Poisson a présenté, pour la première fois, cette objection dans le 19^{me} cahier des Mémoires de l'École Polytechnique (page 382). Il ne citait point le théorème dont j'ai fait usage, mais une proposition très-différente, puisqu'il y omet une condition qui en est une partie nécessaire, et qu'il ne regardait point comme sous-entendue. La réfutation aurait donc été pour ainsi dire superflue : mais le même auteur a reproduit son objection plusieurs années après, et c'est alors seulement qu'il a cité la proposition dont il s'agit telle qu'on la trouve dans la Théorie de la chaleur (pages 372 et 373).

Voici l'énoncé du théorème :

Si l'on écrit l'équation *algébrique* $X = o$, et toutes celles qui en dérivent par la différentiation, $X' = o$, $X'' = o$, $X''' = o$, etc.; et si l'on reconnaît que *toute racine réelle* d'une quelconque de ces équations, étant substituée dans celle qui la précède et dans celle qui la suit, donne deux résultats de signes contraires, il est certain que la proposée $X = o$ a toutes ses racines réelles, et que, par conséquent, il en est de même de toutes les équations subordonnées $X' = o$, $X'' = o$, $X''' = o$, etc. Or, en proposant l'objection dont il s'agit, on n'a point fait l'application littérale du théorème, parce qu'on a omis de considérer les racines réelles du facteur $e^x = o$. Ce facteur coïncide avec celui-ci, $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = o$, lorsque le nombre m croît sans limites et devient plus grand que tout nombre donné. L'équation $e^x = o$ a donc une infinité de facteurs dont on ne doit point faire abstraction, lorsqu'on entreprend d'appliquer textuellement la proposition. On ne peut pas dire que l'équation $e^x + b e^{ax} = o$ a une seule racine réelle, et une infinité de racines imaginaires; car cette équation, qui a une infinité de racines imaginaires, a aussi une infinité de racines réelles. Or l'auteur n'emploie qu'une seule de ces racines réelles : il en omet une infinité d'autres égales entre elles, savoir celles qui réduisent à zéro le facteur e^x.

Lorsque dans ce facteur on attribue à x une valeur réelle négative dont la grandeur absolue surpasse tout nombre donné, la fonction e^x approche continuellement de o, et devient plus petite que tout nombre donné. C'est ce que l'on exprime en disant que l'équation $e^x = o$ a pour racine réelle une valeur infinie de x prise avec le signe —. Une fonction telle que e^x diffère essentiellement de celles qu'on ne pourrait jamais rendre nulles, ou plus petites que tout nombre donné, en attribuant à x des valeurs réelles. Lorsqu'on assimile deux fonctions aussi différentes, on doit arriver à des conséquences erronées.

On connaît encore la nature de l'équation $e^x = 0$ si on la transforme en écrivant $x = -\frac{1}{x'^2}$; car la transformée $e^{-\frac{1}{x'^2}} = 0$ a certainement 0 pour racine réelle, puisque la ligne dont l'équation serait $y = e^{-\frac{1}{x'^2}}$ coupe l'axe à l'origine des x'.

Pour faire l'application complète du théorème que nous avons énoncé à l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, il ne faut pas se borner à une seule des racines réelles de cette équation, mais les considérer toutes. Or, si l'on rétablit ces racines réelles, auxquelles l'auteur de l'objection n'a point eu égard, on voit que la règle n'indique nullement que toutes les racines de l'équation sont réelles. Elle montre au contraire que cette équation ne satisfait pas aux conditions que le théorème suppose.

Pour établir cette conséquence, nous allons rappeler le calcul même qui est employé par l'auteur; et afin de rendre les expressions plus simples, sans altérer en rien les conclusions que l'on en déduit, nous considérerons seulement l'équation $e^x - e^{2x} = 0$. Le lecteur pourra s'assurer facilement qu'il n'y a ici aucune différence entre les conséquences qui conviennent à l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, a et b étant positifs, et celles que l'on déduirait de l'équation très-simple $e^x - e^{2x} = 0$.

Écrivant donc

$$X = e^x - e^{2x} = 0$$
$$\frac{d^n X}{dx^n} = e^x - 2^n e^{2x}$$
$$\frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} = e^x - 2^{n+1} e^{2x}$$
$$\frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = e^x - 2^{n+2} e^{2x},$$

et posant l'équation $\frac{d^{n+1} X}{dx^{n+1}} = 0$, ou $e^x - 2^{n+1} . e^{2x} = 0$, on en tire la valeur de e^x pour la substituer dans les deux valeurs de $\frac{d^n X}{dx^n}$ et $\frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}}$. Par cette élimination, on trouve

$$\frac{d^n X}{dx^n} = 2^n . e^{2x}, \quad \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}} = -2^{n+1} . e^{2x},$$

et l'on détermine la valeur du produit $\frac{d^n X}{dx^n} \cdot \frac{d^{n+2} X}{dx^{n+2}}$, qui est $-2^{2n+1} . e^{4x}$. L'auteur en conclut que toute racine réelle de l'équation intermédiaire $\frac{d^{n+1} X}{dx^n}$, étant substituée dans l'équation qui précède et dans celle qui suit, donne deux résultats de signes contraires : c'est cette conclusion que l'on ne peut pas admettre. En effet, si la valeur réelle de x qui rend nulle la fonction intermédiaire $e^x - 2^{n+1} . e^{2x}$, réduit à zéro le facteur e^x commun aux deux termes, cette même valeur de x étant substituée dans la fonction qui précède, savoir $e^x - 2^n . e^{2x}$, et dans celle qui suit, savoir $e^x - 2^{n+2} . e^{2x}$, réduira l'une et l'autre à zéro. Les deux résultats ne sont donc point de signes différents, ils sont les mêmes. Pour que l'un des résultats fût positif et l'autre négatif, il faudrait ne considérer parmi les racines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1} . e^{2x} = 0$, que celles de ces racines qui ne rendent point nul le facteur e^x. Or il n'y en a qu'une seule, savoir la racine réelle du facteur $1 - 2^{n+1} . e^x = 0$. Cette racine, qui rend e^x égale à $\frac{1}{2^{n+1}}$, donne certainement deux résultats de signes opposés : mais l'application du théorème ne consiste pas à substituer dans les deux fonctions intermédiaires une seule des racines réelles de l'équation $e^x - 2^{n+1} . e^{2x} = 0$; elle exige que l'on emploie toutes ces racines, et il est nécessaire qu'il n'y ait aucune de ces racines réelles qui, étant substituée dans les deux fonctions intermédiaires, donne deux résultats de signes opposés. C'est ce qui n'arrive point ici ; car il y a, au contraire, une infinité de valeurs réelles de x, dont chacune, étant mise pour x dans les deux fonctions intermédiaires, donne le même résultat, savoir zéro.

Pour appliquer à une équation $X = 0$ la proposition dont il s'agit, il faut reconnaître avec certitude qu'il n'y a dans le système entier des fonctions dérivées aucune fonction intermédiaire que l'on puisse rendre nulle, en mettant pour x une valeur réelle quelconque, qui, substituée dans la fonction précédente et dans la suivante, donne deux résultats de même signe. S'il y a une seule de ces valeurs réelles de x qui rendant nulle une quelconque des fonctions intermédiaires donne deux résultats de même signe pour la fonction précédente et la fonction suivante, ou si l'on ne peut reconnaître avec certitude que les signes des deux résultats sont différents, on ne doit point conclure que toutes les racines de $X = 0$ sont réelles.

Donc on n'est point fondé à objecter qu'il résulterait du théorème algébrique que l'équation $e^x - e^{2x} = 0$ a toutes ses racines réelles.

Il en est exactement de même de l'équation $e^x - be^{ax} = 0$, où l'on suppose a et b des nombres positifs. Pour conclure que la proposition indique dans ce cas que toutes les racines sont réelles, il faudrait nécessairement omettre toutes les racines réelles du facteur $e^x = 0$. Il faudrait donc démontrer que ce facteur n'a point de racines, ou qu'elles sont toutes imaginaires; et, faisant comme nous l'avons dit plus haut, $x = -\frac{1}{x'^2}$, il faudrait supposer que l'équation transformée $e^{-\frac{1}{x'^2}} = 0$ n'a point o pour une racine réelle, en sorte que la courbe dont l'équation est $y = e^{-\frac{1}{x'^2}}$ ne rencontrerait point l'axe des x' à l'origine o. Toutes ces conséquences sont contraires aux principes du calcul. Au lieu de conclure que dans l'exemple cité le théorème est en défaut, *ce sont les expressions de l'auteur*, tome VIII des *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, il faut reconnaître que dans cet exemple les conditions qui indiqueraient que toutes les racines sont réelles ne sont point satisfaites.

Le résumé très-simple de notre discussion est que la difficulté assignée s'évanouit entièrement si, au lieu de faire une énumération incomplète des valeurs réelles de x qui rendent nul le facteur commun e^x, et par conséquent la fonction $e^x - be^{ax}$, on considère que cette fonction devient plus petite que tout nombre donné lorsqu'on met pour x une quantité réelle négative dont la valeur absolue devient plus grande que tout nombre donné.

Je rappellerai maintenant l'équation déterminée propre à la question du cylindre, et les principes qui m'ont conduit à appliquer avec certitude à cette équation un théorème d'analyse algébrique. L'équation qui sert à représenter le mouvement de la chaleur dans le cylindre solide, est commune à plusieurs questions physiques; elle exprime les effets du frottement dans un système de plans qui glissent les uns sur les autres, et elle se reproduit dans des recherches dynamiques très-variées : ainsi il est utile d'en discuter avec soin la nature.

M. Poisson a pensé que la proposition énoncée plus haut, concernant les conditions des racines réelles, ne s'applique point aux fonctions transcendantes, si ce n'est dans des cas très-particuliers (19ème cahier de l'École Polytechnique, page 383); mais par rapport à l'équation déterminée qui convient au cylindre, il a adopté successivement deux opinions différentes. Dans le tome VIII des Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences (page 367), après avoir affirmé de nouveau que le théorème cité serait en défaut si on l'appliquait à l'équation exponentielle $e^x - be^{ax} = 0$, il ajoute que la règle convient cependant à l'équation

$$(2) \qquad 0 = 1 - x + \frac{x^2}{(2)^2} - \frac{x^3}{(2.3)^3} + \frac{x^4}{(2.3.4)^4} - \text{etc.},$$

qui appartient à la question du cylindre. Le même auteur a énoncé une autre conclusion dans un second écrit présenté à l'Académie; il y rappelle qu'il avait d'abord pensé qu'à cause de l'accroissement des dénominateurs, le théorème s'appliquait à l'équation (2), mais qu'en y réfléchissant de nouveau il a reconnu que cette conséquence n'est pas fondée.

Il serait inutile de discuter ici ces conclusions, qui, en effet, ne peuvent être toutes les deux vraies, puisqu'elles sont opposées. Je dirai seulement que l'application du théorème algébrique à la question du cylindre doit être déduite d'une analyse exacte qui exclue toute incertitude.

Quant aux principes que j'ai suivis pour résoudre les équations algébriques, ils sont très-différents de ceux qui servent de fondement aux recherches de de Gua ou à la méthode des cascades de Rolle. L'un et l'autre auteur ont cultivé l'analyse des équations; mais ils n'ont point résolu la difficulté principale, qui consiste à distinguer les racines imaginaires. Lagrange et Waring ont donné les premiers une solution théorique de cette question singulière, et la solution ne laisserait rien à désirer si elle était aussi praticable qu'elle est évidente. J'ai traité la même question par d'autres principes, dont l'auteur de l'objection paraît n'avoir point pris connaissance. Je les ai publiés, il y a plusieurs années, dans un Mémoire spécial (Bulletin des Sciences, Société Philomatique, années 1818, page 61, et 1820, page 156.)

J'ai eu principalement en vue, dans cet écrit, la résolution des équations algébriques; je pense que personne ne peut contester l'exactitude de cette solution, dont l'application est facile et générale. En terminant ce mémoire très-succinct, j'ai ajouté que les propositions qu'il renferme ne conviennent pas seulement aux équations algébriques, mais qu'elles s'appliquent aussi aux équations transcendantes. Si j'avais omis cette remarque, j'aurais donné lieu de croire que je regardais la méthode de résolution comme bornée aux fonctions algébriques, proposition entièrement fausse: car j'avais reconnu depuis long-temps que les mêmes principes résolvent aussi les équations non algébriques. Je pensais alors qu'il suffisait d'énoncer cette remarque. Il me semblait qu'en lisant avec attention la démonstration des théorèmes, on distinguerait assez facilement ce qui convient à toutes les fonctions, et ce qui peut dépendre des propriétés spéciales des fonctions algébriques entières. Il est évident que ces dernières fonctions ont un caractère particulier, qui provient surtout de ce que les différentiations répétées réduisent une telle fonction à un nombre constant ; mais les conséquences principales, dont le mémoire contient la démonstration, ne sont point fondées sur cette propriété des fonctions entières. Les conclusions que l'on tire des signes des résultats, les procédés d'approximation, les conditions auxquelles il est nécessaire que ces procédés soient assujettis, la mesure exacte de la convergence, les différentes règles que j'ai données autrefois dans les cours de l'École Polytechnique pour suppléer à l'usage de l'équation aux différences, et qui conduisent toutes à distinguer facilement les racines imaginaires, les conséquences que fournit la comparaison des nombres de variations de signes, en ne considérant que les différences de ces nombres; toutes ces propositions fondamentales, qui constituent la méthode de résolution, s'appliquent aux fonctions non algébriques.

Quant aux conditions données par de Gua pour reconnaitre qu'une équation a toutes ses racines réelles, elles conviennent certainement à toutes les équations, soit algébriques, soit transcendantes, qui sont composées d'un nombre fini ou infini de facteurs. Je n'ai point regardé alors comme nécessaire de développer ces propositions, parce qu'elles sont autant de conséquences des principes dont j'ai rapporté la démonstration dans le mémoire cité. Il n'y en a aucune qui soit bornée aux seules équations algébriques; mais l'application de principes très-généraux peut nécessiter un examen spécial. C'est ainsi que le théorème de Viète sur la composition des coefficients s'applique différemment aux équations dont le premier membre est une fonction entière, et à celles qui ont des dénominateurs.

Il n'est pas moins évident que si l'on considère une fonction non continue, les conséquences algébriques ne subsistent point pour toute l'étendue de la fonction : elles s'appliquent aux parties où la fonction varie par degrés insensibles, et ne peut changer de signe qu'en devenant nulle. On doit aussi faire une remarque semblable au sujet de la proposition algébrique qui exprime que le produit de tous les facteurs du premier degré, correspondant aux racines de $X = 0$, équivaut au premier membre X de cette équation. J'ai prouvé, dans mes premières recherches sur la théorie de la chaleur, que cette proposition ne convient pas à certaines fonctions non algébriques : par exemple à l'équation très-simple $\tang. x = 0$. La fonction $\tang. x$ est fort différente du produit de tous les facteurs du premier degré formé des valeurs de x qui rendent $\tang. x$ nulle : ce produit complet donne $\sin. x$, et non $\tang. x$. Cela provient de ce que la fonction $\tang. x$ est le produit de $\sin. x$ par $\sec. x$. Or les racines de l'équation $\sec. x = 0$, qui sont imaginaires, ne rendent point $\tang. x$ nulle : elles donnent à $\sin. x$ une valeur infinie, de sorte que la fonction $\tang. x$ devient $\frac{0}{0}$; et j'ai montré que si l'on détermine exactement sa valeur, on trouve que $\tang. x$ se réduit à $\sqrt{-1}$, et non à zéro. Ainsi les racines du facteur $\sec. x = 0$ n'appartiennent pas à l'équation $\tang. x = 0$. Il en est de même de toutes les équations analogues que j'ai employées dans la Théorie de la chaleur, par exemple de celle-ci, $\varepsilon - \lambda \text{ tang. } \varepsilon = 0$. ε est l'inconnue, et λ est moindre que l'unité (page 367). En général le produit, quoique complet, des facteurs formés de toutes les racines d'une équation non algébrique $\varphi x = 0$ peut différer de la fonction φx; et cela arrive lorsque les valeurs de x qui rendent nul un des deux facteurs dont la fonction φx est composée, donnent à l'autre facteur une valeur infinie. Comme cette condition ne peut point avoir lieu dans les fonctions algébriques entières, c'est pour cette raison que le théorème de Viète sur la composition des coefficients convient à toutes ces fonctions. Je pourrais ici multiplier les exemples qui montrent que le produit de tous les facteurs simples peut différer du premier membre de l'équation. En général il faut distinguer *les cas ou une fonction est égale au produit d'un nombre fini ou infini de facteurs formés de toutes les racines, et les cas où cette propriété n'a pas lieu ;* mais nous ne pourrions point ici entreprendre cette discussion sans nous écarter trop long-temps du but spécial de cet article, qui est d'expliquer clairement comment j'ai été conduit à prouver, par l'application d'un théorème algébrique, que l'équation transcendante (2), qui se rapporte à la question du cylindre, a en effet toutes ses racines réelles, et de montrer quelles sont ces racines.

Il est d'abord nécessaire de rappeler un théorème général dont j'ai donné la démonstration dans les Mémoires de la Société Philomatique (année 1820, pages 160 et suiv.). Cette proposition peut être ainsi énoncée : une équation algébrique $X = 0$ étant donnée, on forme toutes les fonctions qui dérivent de X par la différentiation, et on écrit la suite entière dans cet ordre inverse,

$$X^{(n)}, X^{(n-1)}, X^{(n-2)}, \ldots\ldots X''', X'', X', X.$$

En substituant dans cette suite de fonctions un certain nombre α, et marquant les signes des résultats, on obtient une suite de signes, qui serait ou pourrait être très-différente si le nombre substitué α venait à changer. On suppose maintenant que la valeur substituée α augmente par degrés insensibles, depuis $\alpha = -\frac{1}{0}$ jusqu'à $\alpha = \frac{1}{0}$, et l'on considère les changements qui surviennent dans le nombre des variations de signes que présente la suite des résultats. Cela posé, nous disons que les racines réelles ou imaginaires de la proposée $X = 0$ correspondent aux nombres des variations de signes que la suite des résultats perd, à mesure que le nombre substitué augmente. Voici en quoi consiste cette relation. Les variations de signes que peut perdre la suite des résultats, lorsque le nombre substitué passe par une valeur déterminée, sont de deux sortes.

1° Il peut arriver, lorsque quelques-unes de ces variations disparaissent, que la dernière fonction X devienne nulle.

2° Il peut arriver que des variations de signes disparaissent, sans que la dernière fonction X devienne nulle. Le premier cas répond aux racines réelles, et le second aux racines imaginaires.

J'ai reconnu que la proposée a précisément autant de racines réelles, égales ou inégales, que la suite perd de variations de signes de la première espèce; et qu'elle a précisément autant de racines imaginaires que la suite des résultats perd de variations de signes de la seconde espèce. Ce théorème, que l'on doit regarder comme fondamental, renferme comme corollaires la remarque de Hudde sur les racines égales, la règle de Descartes concernant le nombre des racines positives ou négatives, et la proposition de de Gua relative aux équations dont toutes les racines sont réelles.

La démonstration de ce théorème général, publiée dans les Mémoires cités de la Société Philomatique, ne diffère point de celle que j'ai donnée autrefois dans les cours de l'école Polytechnique de France. Je suppose ici que le lecteur a sous les yeux cette démonstration, et je me borne à rappeler les conséquences principales.

Le nombre substitué α passant par degrés insensibles de sa valeur initiale $-\frac{1}{0}$ à la dernière $+\frac{1}{0}$, il ne peut survenir de changements dans la suite des signes des résultats que lorsque α atteint et dépasse infiniment peu une valeur de x qui rend nulle une des fonctions $X^{(n)}, X^{(n-1)}, \ldots X''', X'', X', X$. Or, après que α a dépassé cette valeur de x, il peut arriver que le nombre des variations de signes de la suite n'ait point changé: ainsi on trouverait le même nombre de variations en les comptant avant et après. Il peut arriver aussi deux autres cas : le premier, lorsque la fonction qui s'évanouit est la dernière; alors la valeur substituée α est une des racines réelles, et le nombre des variations de signes ne demeure pas le même; il est diminué d'une unité. Dans l'autre cas, la fonction qui s'évanouit n'est pas X : elle est une des fonctions dérivées intermédiaires, et il arrive que le nombre des variations de signes n'est pas le même qu'auparavant; il est diminué de deux unités, et l'on conclud avec certitude que deux des racines de l'équation proposée sont imaginaires. Ainsi

1° Les valeurs accidentelles de x, qui font évanouir une des fonctions, peuvent n'apporter aucun changement dans le nombre total des variations; ces valeurs substituées sont indifférentes.

2° La substitution qui fait évanouir une des fonctions peut diminuer d'une seule unité le nombre des variations; alors la valeur substituée est une racine réelle.

3° La substitution qui rend nulle une fonction intermédiaire fait disparaître deux variations de signes, sans rendre nulle la fonction X; alors on est assuré que deux des racines de l'équation sont imaginaires. Ce sont les deux cas élémentaires pour lesquels le nombre des changements de signes diminue. Il ne peut jamais augmenter; il est conservé, ou il est diminué d'une unité pour chaque racine réelle, ou il est diminué de deux unités pour chaque couple de racines imaginaires. Il n'y a point d'autres cas possibles; ils peuvent se réunir accidentellement, et alors ils donnent lieu à autant de conclusions séparés.

Il est fort important de remarquer ces valeurs *critiques* de x, qui ont la propriété de faire disparaître à la fois deux variations de signe. Cette disparition a lieu parce que la valeur de x qui rend nulle la fonction dérivée intermédiaire donne deux résultats de même signe, lorsqu'on la substitue dans les deux fonctions dont l'une précède et l'autre suit la fonction intermédiaire qui s'évanouit: c'est cette condition qui est le caractère propre des racines imaginaires. Autant de fois que ce caractère se reproduit, autant la proposée a de couples de racines imaginaires; réciproquement, il ne peut y avoir de couples de racines imaginaires que dans le cas où cette condition subsiste.

Cette considération nous fait mieux connaître la nature des racines imaginaires. En effet elle montre que les racines manquent dans de certains intervalles, savoir ceux où il arrive que le nombre substitué α, passant d'une valeur de x à une autre infiniment voisine, rend nulle une fonction intermédiare sans rendre nulle la fonction X, et fait ainsi disparaître deux variations de signes, en donnant deux résultats de même signe à la fonction qui précède et à celle qui suit. Cette conclusion a toujours été regardée comme évidente dans le cas très-simple où la courbe de forme parabolique, et dont l'équation est $y = X$, s'approche de l'axe des x, et après avoir atteint une valeur minimum sans rencontrer l'axe, s'en éloigne et poursuit son cours. Mais ce n'est là qu'un cas particulier des racines imaginaires : ce minimum peut avoir lieu pour une des fonctions dérivées d'un ordre quelconque, et alors il détermine toujours un couple de racines imaginaires. A proprement parler, les racines imaginaires sont des racines *déficientes*, qui manquent dans certains intervalles; et l'on reconnaît que c'est à un de ces intervalles que correspond en effet un couple de racines imaginaires, parce qu'il suffit de prouver que ces deux racines n'existent point dans l'intervalle dont il s'agit, pour conclure avec certitude que l'équation proposée a deux racines imaginaires.

Quoique dans l'énoncé de ces propositions nous ne considérions ici que les fonctions algébriques, il est assez évident que ces racines *déficientes*, que l'on a appelées imaginaires, ont le même caractère dans les équations non algébriques formées d'un nombre fini ou infini de facteurs du premier degré réels ou imaginaires. Ce minimum absolu est le signe propre du manque de deux racines ; mais nous écartons ici toute conclusion relative aux équations non algébriques, afin d'appliquer d'abord les principes fondamentaux à un objet simple et parfaitement défini.

Ce n'est pas seulement dans la fonction principale X que résident ces valeurs *critiques* de la variable x, elles peuvent appartenir à toutes les fonctions dérivées d'un ordre quelconque. Pour la résolution d'une équation il est nécessaire de connaître les intervalles où manquent les racines imaginaires; et ces derniers intervalles doivent être cherchés dans tout le système des fonctions dérivées des différents ordres.

Examinons d'après ces principes le cas particulier où l'équation proposée n'aurait que des racines réelles. Alors la suite des signes des résultats, qui perd successivement toutes ses variations à mesure que le nombre substitué passe de $-\frac{1}{0}$ à $+\frac{1}{0}$, ne perd ces variations que d'une seule manière. Elle en perd une toutes les fois que le nombre x devient successivement égal à chacune des racines réelles. Dans tous les autres cas où l'une des fonctions dérivées devient nulle, le nombre des variations de signes n'est point changé. Il n'arrive jamais qu'une valeur de x, qui rend nulle une fonction intermédiaire dérivée, donne le même signe à la fonction qui précède et à celle qui suit. Au contraire toute valeur réelle de x, qui rend nulle une fonction dérivée intermédiaire, donne deux signes différents à la fonction qui précède et à celle qui suit; et cette dernière condition n'a pas lieu seulement pour une des valeurs réelles de x qui fait évanouir une fonction intermédiaire, elle a lieu pour toutes les valeurs réelles de x qui ont cette propriété : s'il y avait une seule exception, il y aurait un couple de racines imaginaires. Réciproquement si l'on est assuré que toute valeur réelle de x, qui rend nulle une des fonctions intermédiaires, donne deux résultats de signes contraires lorsqu'on la substitue dans les deux fonctions précédente et suivante, il est certain que l'équation algébrique proposée a toutes ses racines réelles: c'est la proposition donnée par de Gua; on voit qu'elle est un corollaire évident du théorème général que j'ai énoncé plus haut.

Dans tous les cas possibles, une équation algébrique a nécessairement autant de racines imaginaires que la suite de signes perd de variations, lorsque le nombre substitué passe par de certaines valeurs réelles de x, qui font disparaître des variations de signes sans que la dernière fonction X s'évanouisse. Ainsi lorsqu'il n'y a point de telles valeurs de x, il n'y a point de racines imaginaires.

Il suffit donc, pour être assuré qu'une équation algébrique a toutes ses racines réelles, de reconnaître qu'il n'existe aucune de ces valeurs réelles de x qui, sans rendre nulle la dernière fonction X, fassent disparaître deux variations à la fois.

Nous considérons maintenant la fonction transcendante $\varphi r = 1 - \frac{r}{1} + \frac{r^2}{(1.2)^2} - \frac{r^3}{(1.2.3)^2} + \frac{r^4}{(1.2.3.4)^2} -$ etc., afin de prouver que l'équation $\varphi r = 0$ a toutes ses racines réelles. Cette équation est celle qui se rapporte au mouvement de la chaleur dans un cylindre solide.

Je me suis d'abord proposé de connaître la forme de la ligne courbe dont l'équation est $y = \varphi r$, y désignant l'ordonnée dont r est l'abcisse. Cette ligne a des propriétés fort remarquables, que l'on déduit d'une expression de φr en intégrale définie. Dans mon premier mémoire sur la Théorie de la chaleur (1807), j'ai employé cette intégrale pour déterminer la forme de la ligne dont l'équation est $y = \varphi r$; et j'ai indiqué une propriété principale, que j'ai rappelée dans la Théorie analytique de la chaleur, page 380. Le mémoire de 1807, qui demeure déposé dans les archives de l'Institut, contient d'autres détails, art. 127, page 180; on en conclud évidemment que la courbe dont il s'agit coupe une infinité de fois son axe, et forme des aires qui se détruisent alternativement.

L'examen attentif de l'intégrale définie ne laisse aucun doute sur la multiplicité et les limites des racines réelles. On voit clairement que l'équation transcendante $\varphi r = 0$ a une infinité de ces racines réelles : nous les désignons par α, β, γ, δ, ε, etc. Mais, pour compléter la discussion, il restait à examiner si cette équation $\varphi r = 0$ est en effet du nombre de celles qui ne peuvent avoir que des racines réelles.

Au lieu d'appliquer immédiatement à cette équation transcendante les théorèmes que nous avons rappelés ci-dessus, nous examinons d'abord la nature de la fonction algébrique suivante :

$$F(x, n) = 1 - \frac{nx}{1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{x^3}{2.3}$$
$$+ \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}$$

Cette fonction est à deux variables x et n; n est un nombre entier. Le nombre des termes est $n + 1$, et si l'on suppose n infini, la fonction transcendante qui en résulte ne contient que le produit nx, et devient

$$1 - nx + \frac{n^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{n^3}{2.3} \cdot \frac{x^3}{2.3} + \frac{n^4}{2.3.4} \cdot \frac{x^4}{2.3.4} - \text{etc.}$$

Faisant $nx = r$, on trouve la fonction transcendante $\varphi(r)$ qui est l'objet de la question.

Nous allons maintenant démontrer que l'équation algébrique $F(x, n) = 0$, dont x est l'inconnue, n'a que des racines réelles; et nous prouverons qu'il s'en suit nécessairement que l'équation trancendante $\varphi(r) = 0$, dont r est l'inconnue, a aussi toutes ses racines réelles.

Pour reconnaître la nature des racines de l'équation algébrique $F(x, n) = 0$, nous appliquerons les théorèmes que l'on vient de rappeler.

La fonction $F(x, n)$ étant désignée par y, on trouve que y satisfait à l'équation différentielle $x\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - x)\frac{dy}{dx} + ny = 0$, ce dont on peut s'assurer par la différentiation. On conclud de cette dernière équation les suivantes,

$$
(e)\qquad
\begin{aligned}
&x\frac{d^3y}{dx^3} + (2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + n\frac{dy}{dx} = 0\\
&x\frac{d^4y}{dx^4} + (3 - x)\frac{d^3y}{dx^3} + n\frac{d^2y}{dx^2} = 0\\
&x\frac{d^5y}{dx^5} + (4 - x)\frac{d^4y}{dx^4} + n\frac{d^3y}{dx^3} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x\frac{d^iy}{dx^i} + (i - 1 - x)\frac{d^{i-1}y}{dx^{i-1}} + n\frac{d^{i-2}y}{dx^{i-2}} = 0.
\end{aligned}
$$

Cette relation récurrente se reproduit autant de fois que la fonction y peut être différentiée sans devenir nulle, en sorte qu'il y a un nombre n de ces équations (e). Si actuellement on suppose, dans chacune des équations (e), que le second terme est rendu nul par la substitution d'une certaine valeur réelle de x dans une fonction dérivée, on voit que la même substitution donne, pour la fonction dérivée précédente et pour celle qui suit, deux résultats dont le signe ne peut pas être le même. En effet la valeur de x qui, substituée dans le second terme, rend ce terme nul, n'est pas un nombre négatif: car la fonction qui exprime y ne peut pas devenir nulle lorsqu'on donne à x une valeur négative, puisque tous les termes recevraient ce même signe. Il en est de même de $\frac{dy}{dx}$, et de toutes les fonctions dérivées de y: aucune de ces fonctions ne peut être rendue nulle par la substitution d'une valeur négative de x, car tous les termes prendraient le même signe. Donc les valeurs réelles de x, qui auraient la propriété de faire évanouir une des fonctions dérivées, ne peuvent être que positives. Donc en substituant pour x, dans une des équations (e), une valeur réelle de x qui ferait évanouir le second terme, il arrivera toujours que le premier et le dernier terme n'auront pas un même signe, car leur somme ne serait pas nulle. On ne peut pas supposer que la même valeur de x, qui fait évanouir le second terme, rend aussi nuls le premier et le troisième terme d'une des équations (e); car si cela avait lieu, on conclurait de ces équations que la même valeur de x fait évanouir les fonctions dérivées de tous les ordres, sans aucune exception. Ce cas singulier serait celui où l'équation proposée $y=0$ aurait toutes ses racines égales.

Il résulte évidemment de la condition récurrente qui vient d'être démontrée, que l'équation $F(x, n)=0$ a toutes ses racines réelles. En effet cette équation est algébrique, et il n'existe aucune valeur de x propre à faire évanouir une fonction dérivée intermédiaire, en donnant deux résultats positifs ou deux résultats négatifs pour les fonctions précédente et suivante. Il suit donc rigoureusement des principes de l'analyse algébrique que l'équation $F(x,n)=0$ n'ayant aucune valeur *critique*, n'a point de racines imaginaires. Cette conséquence est entièrement indépendante de la valeur du nombre entier n: quel que puisse être ce nombre n, et quand on supposerait qu'il croît de plus en plus, et devient plus grand que tout nombre donné, chacune des équations que l'on formerait aurait toutes ses racines réelles et positives.

On supposera n infini, et désignant par $\varphi(n,x)$ la fonction transcendante, on voit que l'équation $\varphi(n,x)=0$ n'est autre chose qu'un cas particulier de l'équation $F(n,x)=0$. Elle appartient au système de toutes les équations que l'on forme, en donnant à n dans $F(n,x)$ les différentes valeurs 1,2,3,4,5, etc. à l'infini; et comme on ne trouverait ainsi que des équations dont toutes les racines sont réelles, on en conclud que cette propriété, entièrement indépendante du nombre n, subsiste toujours lorsque n devient plus grand que tout nombre donné. Alors la fonction est transcendante, et l'équation devient $\varphi(r)=0$. Donc cette équation n'a point de racines imaginaires. On pourrait regarder comme superflu tout examen ultérieur de l'équation $\varphi(r)=0$; et toutefois la conclusion deviendra encore plus conforme aux principes communs de l'analyse algébrique, en le présentant comme il suit.

Soit $nx=r$: nous avons dit que, par l'emploi des constructions, ou en remarquant les propriétés de l'expression de $\varphi(r)$ en intégrale définie, on voit que la courbe dont l'équation est $y=\varphi(r)$ a une infinité de sinuosités, et qu'elle coupe l'axe des r en une multitude de points à la droite de l'origine o. Nous avons désigné par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. les distances de o à ces divers points d'intersection. Si l'on écrit $nx = r$ dans l'équation algébrique $F(x, n) = 0$, qui est du degré n, et a ses n racines réelles, on a une transformée algébrique, que nous désignons par $f(r, n) = 0$. r est l'inconnue, et toutes les racines, c'est-à-dire les valeurs de r, sont réelles; car on les trouverait en multipliant par le nombre n les valeurs de x qui sont les racines de l'équation $F(x, n) = 0$. Or si l'on donnait au nombre entier n une valeur immensément grande, qui surpasserait, par exemple, plusieurs millions, il est manifeste que l'équation algébrique $f(r, n) = 0$ donnerait pour l'inconnue r des valeurs réelles a, b, c, d, etc. extrêmement peu différentes de ces racines que nous avons désignées par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., et qui, étant prises pour r, rendent nulle la fonction $\varphi(r)$. Si l'on remarquait une des valeurs algébriques a, b, c, d, etc., par exemple la quatrième d par ordre de grandeur, on la trouverait extrêmement peu différente de la racine δ du même rang qui satisfait à l'équation transcendante $\varphi(r) = 0$. En général chacune des valeurs algébriques de r données par l'équation $f(r, n) = 0$, et désignées par les quantités a, b, c, d, etc., approche continuellement de la valeur du même rang, prise parmi les racines de l'équation $\varphi r = 0$; elle en approche d'autant plus que le nombre n est plus grand, et ce nombre peut être tel que la différence soit moindre que toute grandeur donnée. Les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. sont les limites respectives vers lesquelles les valeurs a, b, c, d, etc. convergent de plus en plus. Le nombre des valeurs données par l'équation $f(r, n) = 0$ augmente continuellement, et ces valeurs se rapprochent infiniment des racines cherchées α, β, γ, δ, etc. Or l'équation $f(r, n) = 0$ étant algébrique, a toutes les propriétés élémentaires dont jouissent les équations algébriques et qui sont démontrées depuis long-temps : par conséquent les théorèmes de Viète et d'Harriot sur la composition des équations s'appliquent à celle-ci.

Ainsi la fonction $f(r, n)$ n'est autre chose que le produit des n facteurs du premier degré, qui répondent aux n valeurs réelles a, b, c, d, etc. données par l'équation $f(r, n)=0$ Nous écrirons donc l'équation générale

$$(E) \qquad f(r,n)=\left(1-\frac{r}{a}\right)\left(1-\frac{r}{b}\right)\left(1-\frac{r}{c}\right)\left(1-\frac{r}{d}\right)\ldots\ldots$$

Il ne reste plus qu'à passer de cette équation au cas particulier où le nombre n est supposé infini.

Pour connaître la propriété qui, dans ce cas, est exprimée par l'équation (E), il suffit de porter les quantités qui entrent dans cette équation aux limites vers lesquelles elles convergent. Or la fonction $f(r, n)$ a pour limite la fonction transcendante $\varphi(r)$; les limites des valeurs a, b, c, d, etc. sont les nombres que nous avons désignés par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. On a donc cette relation

$$\varphi(r)=\left(1-\frac{r}{\alpha}\right)\left(1-\frac{r}{\beta}\right)\left(1-\frac{r}{\gamma}\right)\left(1-\frac{r}{\delta}\right)\ldots\ldots\ldots \text{à l'infini}$$

On connaît par ce résultat que la fonction transcendante $\varphi(r)$ est formée du produit d'un nombre infini de facteurs du premier degré correspondants aux racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., dont chacune fait évanouir la fonction $\varphi(r)$. On regarde comme utile de démontrer spécialement cette proposition pour la fonction transcendante $\varphi(r)$, parce qu'il y a, comme je l'ai remarqué autrefois, plusieurs cas où le produit des facteurs simples ne forme pas le premier membre de la proposée.

Il résulte donc de l'analyse précédente que la fonction $\varphi(r)$ est le produit de tous les facteurs du premier degré

$$1-\frac{r}{\alpha},\quad 1-\frac{r}{\beta},\quad 1-\frac{r}{\gamma},\quad 1-\frac{r}{\delta},\ \text{etc.}$$

qui correspondent aux racines. Cela posé, il est manifeste qu'aucune valeur différente des grandeurs réelles α, β, γ, δ, etc. ne pourrait faire évanouir cette fonction $\varphi(r)$. En effet un facteur tel que $1-\frac{r}{\alpha}$ ne peut devenir nul que si l'on fait $r=\alpha$: donc si l'on donnait à x une valeur quelconque réelle ou imaginaire qui ne serait ni α, ni β, ni γ, etc., aucun des facteurs ne serait nul; donc le produit aurait une certaine valeur non nulle. Donc si l'on met pour r dans $\varphi(r)$ une valeur quelconque, soit qu'on la suppose ou réelle ou imaginaire, et si elle n'est point une des racines que nous avons désignées par α, β, γ, δ, etc., la fonction $\varphi(r)$ ne devient point nulle: donc l'équation transcendante $\varphi r=0$ a ces racines réelles α, β, γ, δ, etc., et n'a aucune autre racine ou réelle ou imaginaire.

Il est remarquable que l'on parvienne ainsi à démontrer que toutes les racines de l'équation transcendante $\varphi(r)=0$ sont réelles, sans qu'il soit nécessaire de regarder comme connue la forme des expressions imaginaires, que l'on sait être celle du binôme $\mu+\nu\sqrt{-1}$.

Au reste, en considérant *a priori* que si les équations déterminées propres à la théorie de la chaleur avaient des racines imaginaires, leur forme ne pourrait être que celle du binôme $\mu+\nu\sqrt{-1}$, on voit qu'il est pour ainsi dire superflu de démontrer que les équations dont il s'agit ont toutes leurs racines réelles. Car la communication de la chaleur s'opérant toujours par voie de partage, il est évident, pour ceux qui connaissent les principes de cette théorie, que le mouvement oscillatoire ne peut s'établir et subsister sans une cause extérieure. Cela résulte aussi de la nature de l'équation différentielle, qui, dans les questions dont il s'agit, ne contient pas, comme les équations dynamiques, la fluxion du second ordre par rapport au temps. Or cette oscillation perpétuelle de la chaleur aurait lieu, si l'expression du mouvement contenait des quantités imaginaires. Si les équations déterminées qui conviennent à cette théorie pouvaient avoir de telles racines, on ne devrait point les introduire dans les solutions. On est assuré d'avance qu'il faudrait les omettre.

En recherchant la nature de ces racines, je n'ai d'autre but que de montrer l'accord de tous les éléments analytiques dont la théorie se compose.

Il me reste à rappeler les premières objections qui ont été présentées sur la nature des équations déterminées propres aux questions principales de la théorie de la chaleur. Cette théorie a été donnée pour la première fois sur la fin de l'année 1807, dans un ouvrage manuscrit qui est encore déposé aux archives de l'Institut. Les principes physiques et analytiques qui servent de fondement à ces recherches, n'ont point été saisis d'abord : il s'est passé plusieurs années avant qu'on en reconnût l'exactitude. Aujourd'hui même les résultats cosmologiques de cette théorie, la notion de la température des espaces planétaires, les lois mathématiques de la chaleur rayonnante, les équations différentielles du mouvement de la chaleur dans les liquides, n'ont point encore fixé l'attention de tous les principaux géomètres. Les vérités mathématiques, quoique exactement démontrées, ne s'établissent qu'après un long examen. Les théorèmes généraux qui m'ont servi à intégrer les équations différentielles s'appliquant à un grand nombre de questions physiques qui n'avaient point été résolues, la connaissance de ces théorèmes et la méthode d'intégration qui en dérive sont devenues assez générales; mais les autres résultats de la théorie sont, pour ainsi dire, encore ignorés. Quant à l'équation transcendante déterminée qui exprime le mouvement de la chaleur dans le cylindre, elle se reproduit dans des recherches physiques très-diverses : c'est pour cette raison que j'en présente aujourd'hui l'analyse avec de nouveaux développements.

On a objecté, durant plusieurs années, que les équations déterminées qui servent à exprimer le mouvement de la chaleur dans la sphère ont des racines imaginaires, et l'on a cité, comme exemple, l'équation très-simple tang. $x = o$. Comme elle est formée des deux facteurs sin. x et sec. x, on concluait qu'elle doit avoir, 1° les racines réelles de l'équation sin. $x = o$, 2° les racines de l'équation sec. $x = o$, qui ne peuvent être qu'imaginaires.

J'ai discuté avec soin celles de ces objections qu'il m'a paru nécessaire de réfuter, et j'ai écrit à ce sujet des notes assez étendues, qui sont annexées au premier Mémoire, et déposées aux archives de l'Institut. Elles ont été communiquées à plusieurs géomètres, et il n'y a personne qui ne puisse en prendre connaissance. Ces pièces ont été remises à M. Laplace, qui, selon son usage, a bien voulu inscrire de sa main la date de la présentation, savoir le 29 octobre 1809. J'ai rappelé spécialement dans ces notes l'objection relative aux racines de l'équation tang. $x = 0$; et pour la réfuter j'ai prouvé, non pas que l'équation sec. $x = 0$ n'a aucune racine ni réelle ni imaginaire, ce qui ne serait pas conforme aux principes d'une analyse exacte, mais que les racines imaginaires de cette équation sec. $x = 0$ n'appartiennent point à l'équation tang. $x = 0$. On n'avait pas encore eu l'occasion de remarquer qu'il y a des cas où une fonction n'est pas le produit de tous les facteurs du premier degré correspondant aux racines de l'équation dont le premier membre est la fonction elle-même; je montrai que, pour l'équation dont il s'agit, tang. $x = 0$, ce produit est sin. x, et non point tang. x.

Je termine ici ce Mémoire, en omettant des développements qui n'appartiendraient qu'aux traités généraux d'analyse. Ces considérations sur les propriétés des fonctions transcendantes, et sur leurs rapports avec l'analyse algébrique, méritent toute l'attention des géomètres. Elles montrent que les principes de la résolution des équations appartiennent à l'analyse générale, dont elles sont le vrai fondement.

L'étude approfondie de la théorie des équations éclaire des questions physiques très-variées et très-importantes, par exemple celles qui représentent les dernières oscillations des corps, ou divers mouvements des fluides, ou les conditions de stabilité du système solaire, ou enfin les lois naturelles de la distribution de la chaleur.