MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

(1)

Objet de la question, formule qui en donne la solution.

CE Mémoire a pour objet la solution d'une question d'analyse qui appartient à la théorie de la chaleur. Cette nouvelle recherche servira à perfectionner les applications, en introduisant dans le calcul les variations que l'on observe dans les coefficients spécifiques. On peut à la vérité regarder ces coefficients comme constants dans la question des températures terrestres, qui est l'application la plus importante; mais il y a d'autres questions pour lesquelles il serait nécessaire d'avoir égard aux variations que les expériences ont indiquées. Les propositions qui sont demontrées dans le Mémoire, ont un rapport direct avec l'analyse de ces approximations successives.

Je ne rappellerai point ici les questions fondamentales de la théorie de la chaleur. Il y a peu d'années qu'elles n'avaient point encore été soumises au calcul; on pouvait même douter que l'analyse mathématique s'étendît à cet ordre de phénomènes, et fût propre à les exprimer d'une manière aussi claire et aussi complète par des intégrales d'équations à différences partielles. Les solutions que j'ai données de ces questions principales sont aujourd'hui généralement connues; elles ont été confirmées par les recherches de plusieurs géomètres.

J'ai traité ensuite une question beaucoup plus composée que les précédentes; mais que l'on peut encore soumettre à l'analyse mathématique. Elle a pour objet de former les équations différentielles du mouvement de la chaleur dans les liquides, les variations des températures étant occasionnées par la communication de la chaleur entre les molécules, et en même temps par les déplacements infiniment variés que subissent toutes les parties du liquide, à raison des changements continuels de densité. J'ai donné les équations, dont il s'agit, dans un Mémoire lu à cette Académie, et dont l'extrait a été publié.

Je me propose maintenant d'ajouter à la même théorie la solution d'une question nouvelle, que je considère d'abord comme purement analytique, et dont je présenterai par la suite des applications variées. Il s'agit d'assujétir les deux extrémités d'un prisme à des températures entièrement arbitraires exprimées par deux fonctions différentes du temps, qu'elles soient ou non périodiques. L'état initial du prisme est donné; il est représenté par une troisième fonction; on se propose d'intégrer l'équation différentielle du mouvement de la chaleur, en sorte que l'intégrale comprenne trois fonctions arbitraires : savoir celle qui représente l'état initial du solide, et deux autres dont chacune exprime l'état donné et variable d'une extrémité.

On pourrait appliquer à cette question les théorèmes que j'ai donnés dans mes recherches précédentes, et qui servent à transformer une fonction quelconque, soit en séries exponentielles, soit en intégrales définies ; car l'emploi des deux propositions principales peut évidemment conduire à l'intégrale cherchée; mais sous cette forme le calcul est très-composé, et ne pourrait point faire connaître les lois simples auxquelles les résultats sont assujétis.

C'est par l'application de ces théorèmes que j'ai déterminé autrefois les lois du mouvement périodique de la chaleur solaire, qui pénètre la masse terrestre jusqu'à une certaine profondeur, et cause les variations diurnes ou annuelles; mais dans cette recherche sur les mouvements alternatifs de la chaleur solaire, les températures de l'extrémité du solide sont exprimées par des fonctions périodiques, ce qui rend l'analyse plus facile. Dans la question actuelle les températures des deux extrémités du solide sont exprimées par des fonctions quelconques ; et quoique les principes déja connus suffissent pour montrer que la solution est possible, ils ne donneraient point cette solution sous une forme propre à représenter clairement les résultats. J'ai donc déduit l'intégrale cherchée de considérations différentes et spéciales, qui rendent les conséquences très-manifestes et facilitent toutes les applications.

Voici la formule qui donne la solution de cette question :

$$(1)\quad V_t = \frac{x}{\varpi} f t + \frac{2}{\varpi} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2 t} \frac{1}{i} \sin.(ix) \cos.(i\varpi) \left\{ f o + \int_0^t dr f' r e^{i^2 r} \right\}$$

$$+ \left(\frac{\varpi - x}{\varpi}\right) \varphi t - \frac{2}{\varpi} \sum e^{-i^2 t} \frac{1}{i} \sin.(ix) \left\{ \varphi o + \int_0^t dr \varphi' r e^{i^2 r} \right\}$$

$$+ \frac{2}{\varpi} \sum e^{-i^2 t} \sin.(ix) \int_0^{\varpi} dr \psi r \sin.(ir);$$

x désigne la distance d'un point quelconque m du solide à sa première extrémité o, t est le temps écoulé à partir de l'état initial, V_t exprime la température du point m après le temps t; la distance de la seconde extrémité ϖ à l'origine o est représentée par le nombre ϖ; les fonctions du temps ft, φt sont arbitraires, elles expriment respectivement les températures variables des deux extrémités o et ϖ du prisme. La troisième fonction arbitraire ψx qui affecte la distance variable x d'un point intérieur à l'extrémité o, représente le système des températures initiales.

On doit donner au nombre entier i sous le signe $\sum$ toutes les valeurs possibles depuis et y compris 1, il faut prendre la somme de ces valeurs. Le signe d'intégration définie $\int$ porte, suivant notre usage, les limites entre lesquelles l'intégrale doit être effectuée; r est une quantité auxiliaire qui disparaît après l'intégration définie, en sorte qu'il ne reste dans l'expression de V_t que des quantités connues.

(2)

La solution a trois parties distinctes.

La valeur V_t donnée par l'équation (1), contient trois parties différentes. Si dans la première, qui forme la première ligne, on écrit $\varpi - x$ au lieu de x, et φ au lieu de f, on trouve la seconde partie. On verra par la suite que la première représente l'état où le solide parviendrait après le temps écoulé t, si toutes les températures initiales des points dont la distance à l'origine o est plus grande que zéro et moindre que ϖ étant supposées nulles, on assujétissait pendant le temps t le point o à la température constante zéro, et le point ϖ à la température variable ft.

La seconde partie de la formule représente l'état où se trouverait le même solide après le temps écoulé t, si les températures initiales des mêmes points intermédiaires dont la distance à l'origine o surpasse zéro et est moindre que ϖ étant supposées nulles, on assujétissait pendant le temps t le point o à la température variable φt, et le point ϖ à la température fixe zéro.

Enfin la troisième partie de la formule (1) représente l'état où se trouverait le solide après le temps écoulé t, si le système des températures initiales étant exprimé par une fonction quelconque ψx de la distance x, on assujétissait le solide à chacune de ses deux extrémités à la température fixe zéro.

Quant à la valeur complète V_t, elle fait connaître quel sera après le temps écoulé t l'état du prisme, si les températures initiales étant exprimées par ψx, les deux extrémités sont assujéties à des températures variables, savoir : l'une ft au point o et l'autre φt au point ϖ.

(3)

Première démonstration. La formule satisfait à l'équation différentielle, aux conditions des extrémités, et à l'état initial.

Sans développer dans ces premiers articles la suite des raisonnements qui m'ont conduit à la solution, j'en démontrerai d'abord la vérité en la fondant sur un principe général qui est évident, et dont voici l'énoncé. Si l'on forme une valeur v

de la température variable qui satisfasse à l'équation différentielle du mouvement de la chaleur et à toutes les conditions relatives aux extrémités, et qui pour un temps donné coïncide avec l'état du système, on est assuré que l'expression de v est l'intégrale cherchée. Il ne peut y avoir aucune autre intégrale réellement différente de celle-là, quel que puisse être d'ailleurs le nombre des fonctions arbitraires. Il suffira donc de prouver que la formule qui donne l'expression V_t satisfait à l'équation différentielle et aux conditions des extrémités, et que de plus en donnant au temps sa première valeur zéro, la température V_0 représente le système ψx des températures initiales.

Or l'équation différentielle du mouvement linéaire de la chaleur est $\frac{dv}{dt}=\frac{k}{C.D}\frac{d^2v}{dx^2}$, et si l'on écrit $\frac{kt}{C.D}$ au lieu de t, on a $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}$. Il faut donc considérer l'équation à différentielles partielles très-simple $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}$. On reconnaîtra, comme il suit, que l'expression de V_t satisfait à cette dernière équation. En effet, on conclut de l'équation (1)

$$(2)\quad \frac{d^2V_t}{dx^2}=-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\, i\sin.(ix)\cos.(ix)\left\{fo+\int_0^t dr f'r e^{i^2r}\right\}$$
$$+\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\, i\sin.(ix)\left\{\varphi o+\int_0^t dr\varphi' r e^{i^2r}\right\}$$
$$-\frac{2}{\varpi}\sum i^2 e^{-i^2t}\sin.(ix)\int_0^t dr\psi r\sin.(ir),$$

et

$$(3)\ \frac{dV_t}{dt}=\frac{x}{\varpi}f't-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\,i\sin.(ix)\cos.(i\varpi)\left\{fo+\int_0^t drf're^{i^2r}\right\}$$
$$+\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin.(ix)}{i}\cos.(i\varpi)\frac{d}{dt}P$$
$$+\left(\frac{\varpi-x}{\varpi}\right)\varphi't+\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\sin.(ix)\left\{\varphi o+\int_0^t dr\psi're^{i^2r}\right\}$$
$$-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin.(ix)}{i}\frac{d}{dt}Q.$$

On représente par P le facteur $fo+\int_0^t drf're^{i^2r}$, et par Q le facteur $\varphi o+\int_0^t dr\varphi're^{i^2r}$; or pour trouver la différentielle de P par rapport à t, ou ce qui est la même chose la différentielle du terme $\int_0^t drf're^{i^2r}$, il faut omettre le signe d'intégration définie et donner à la variable auxiliaire r la valeur t qui est sa limite; nous supposons connue cette règle qui est démontrée dans plusieurs ouvrages, et dont la vérité est pour ainsi dire évidente, on a donc $\frac{d}{dt}P=f'te^{i^2t}$, et suivant la même règle, on a $\frac{d}{dt}Q=\varphi'te^{i^2t}$. Il reste donc dans la première partie de $\frac{dV_t}{dt}$, le dernier terme $\frac{2}{\varpi}f't\sum\frac{\sin.(ix)}{i}\cos.i\varpi$, et dans la deuxième partie de $\frac{dV}{dt}$ le dernier terme $-\frac{1}{\varpi}\varphi't\sum\frac{\sin.(ix)}{i}$. Or la quantité

$\sum \frac{\sin.(ix)}{i} \cos.(i\varpi)$ est connue, et la quantité $\sum \frac{\sin.(ix)}{i}$ est connue aussi; la première est $-\frac{1}{2}x$, et la seconde est $\frac{1}{2}(\varpi - x)$. Nous rappellerons plus bas la démonstration de ces deux propositions. Il s'ensuit que dans l'expression de $\frac{dV_t}{dt}$ les termes $\frac{2}{\varpi} f' t$ et $\frac{\varpi - x}{\varpi} \varphi' t$ sont détruits par des termes suivants, et que les deux valeurs de $\frac{d^2 v}{dx^2}$ et $\frac{dv}{dt}$ sont identiques : donc l'expression de V_t donnée par la formule (1), satisfait à l'équation différentielle du mouvement de la chaleur.

De plus, il est facile de reconnaître que l'état initial est représenté par cette valeur de V_t; en effet, si dans l'équation (1) on pose $t = 0$, on trouve

$$(4) \quad V_{(t=0)} = \frac{x}{\varpi} f0 + \frac{2}{\varpi} f0 \sum \frac{\sin.(ix)}{i} \cos.(i\varpi) + \frac{\varpi - x}{\varpi} \varphi 0 - \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin.(ix)}{i} + \frac{2}{\varpi} \sum (\sin. ix) \int_0^{\varpi} dr \psi r \sin.(ir);$$

or de ces trois parties de la valeur de V_0, la première et la seconde sont nulles comme on le montrera plus bas, et la troisième donne la valeur de ψx.

Je ne rappellerai point les différentes démonstrations que l'on peut donner de cette dernière proposition; je me borne à en exprimer le véritable sens. Il faut concevoir que pour former l'intégrale $\int_0^{\varpi} dr \psi r \sin.(ir)$, on donne d'abord à i une seule valeur j prise parmi les nombres entiers 1, 2, 3, etc., et qu'ensuite on donne à la variable r toutes les valeurs qu'elle peut avoir depuis $r=0$ jusqu'à $r=\varpi$; on pourrait construire une courbe dont l'ordonnée est $\psi r \sin. j r$. L'aire de cette courbe qui repose sur l'intervalle de o à ϖ équivaut à une certaine quantité qui contient j, et que nous représentons par α_j; on forme donc le terme $\alpha_j \sin.(jx)$, puis attribuant à i toutes ses valeurs successives 1, 2, 3, 4, etc., on a la série $\alpha_1 \sin. x + \alpha_2 \sin. 2x + \alpha_3 \sin. 3x +$ etc., c'est la somme de cette série que l'on représente par $\sum \alpha_i \sin.(ix)$. Or cette même série est toujours convergente. On donne à x une valeur quelconque plus grande que o et moindre que ϖ, alors la somme des termes approche de plus en plus et sans fin d'une certaine limite qui dépend de la distance x, c'est-à-dire que l'on peut concevoir le nombre des termes de la série assez grand pour que la somme des termes diffère de sa limite d'une quantité aussi petite qu'on le voudra.

Nous avons démontré plusieurs fois le théorème exprimé par l'équation

$$(5) \qquad \psi x = \frac{2}{\varpi} \sum \sin.(ix) \int_0^{\varpi} dr \, \psi r \sin.(ir);$$

on y peut parvenir de différentes manières, et la formule se déduit très-facilement de l'intégration définie : mais ce qu'il importe surtout de reconnaître distinctement ; c'est que la série est toujours convergente, et que la valeur attribuée à la variable x doit ici être comprise dans l'intervalle de o à ϖ. On ne considère point ici les valeurs que la même série exprimerait si l'on donnait à x des valeurs singulières qui ne seraient pas plus grandes que zéro et moindres que ϖ; la discussion de ces valeurs est facile, mais elle n'appartient pas à la question actuelle.

Si maintenant on applique le théorème dont il s'agit, au cas où la fonction que l'on veut représenter est $\varpi - x$ dans l'intervalle de o à ϖ, on trouve $\frac{\varpi - x}{\varpi} = 2\sum \frac{\sin.(ix)}{i}$, en appliquant le même théorème (5) à la fonction x, on trouve $x = 2\sum \frac{\sin. ix}{i} \cos.(i\varpi)$, série qui était connue depuis longtemps. Il est donc certain, comme on l'a énoncé plus haut, qu'en faisant $t = 0$ dans l'expression de V_t donnée par l'équation (1), les termes qui contiennent $f'0$ et $\varphi'0$ disparaissent et qu'il ne reste que la quantité $\frac{2}{\varpi}\sum \frac{\sin.(ix)}{i}\int_0^{\varpi} dr \psi r \sin.(ix)$, qui, suivant le même théorème, équivaut à ψx; donc l'état initial du solide est représenté par la valeur de V_0 de l'équation (4).

Quant aux conditions relatives aux extrémités, elles subsistent pour toutes les valeurs de t: car si l'on fait $x = \varpi$ dans l'expression V_t elle devient égale à ft, quelle que soit la valeur de t, et lorsque $x = 0$ elle devient φt. Donc l'expression de V_t représentera les températures variables du solide pendant toute la durée du phénomène; puisqu'elle convient à l'état initial, aux conditions des extrémités et à l'équation différentielle.

(4)

Énoncé des trois questions partielles dont on réunit les solutions.

Après avoir démontré la vérité de cette solution, il nous reste à exposer les considérations dont on peut la déduire; cet examen est utile, parce que les mêmes considérations s'appliquent à diverses autres recherches.

La question a pour objet de trouver une expression de v qui représente l'état initial lorsqu'on fait $t=0$, qui devienne ft lorsqu'on fait $x=\varpi$, et qui devienne φt lorsque $x=0$. Or on peut considérer séparément chacune des trois questions suivantes : la première consiste à déterminer l'état variable du solide lorsque l'état initial et arbitraire étant donné, chacune des deux extrémités est retenue à la température zéro; ensuite on formera une seconde question qui consiste à déterminer quel serait l'état variable du prisme si la première extrémité étant retenue à la température zéro, la seconde était assujétie à une température variable donnée par une fonction quelconque du temps, et si l'on supposait d'ailleurs que dans l'état initial du prisme les températures des points dont la distance à l'origine est moindre que zéro et plus grande que ϖ, sont toutes nulles.

La troisième question est, pour ainsi dire, la même que la seconde, elle consiste à trouver l'état variable du prisme lorsque les températures initiales des points intermédiaires étant supposées nulles, la première extrémité est assujétie à une température variable donnée par la fonction φt, la seconde extrémité étant retenue à la température zéro.

Cela posé, si l'on conçoit que ces trois questions sont résolues et qu'elles sont appliquées à un même prisme, ayant les mêmes extrémités 0 et ϖ, il est certain que la superposition des trois résultats donnera la solution de la question, où l'on considère trois fonctions dont l'une exprime l'état initial du solide, et les deux autres autres expriment l'état variable des deux extrémités. Il suffit donc de résoudre chacune des trois questions et d'ajouter les résultats. Or la solution de la première est connue, je l'ai donnée pour la première fois dans mes Recherches sur la Théorie de la chaleur lues et déposées à l'Institut de France, le 21 décembre 1807, en désignant par ψx le système des températures initiales du solide, et par v la température après le temps écoulé t en un point dont la distance à l'origine o est x, on a cette expression

$$(6)\qquad v=\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} dr\,\psi r\sin.(ir).$$

Nous passons à l'examen de la seconde question.

(5)

Température variable à l'extrémité du solide. On résout la question en déterminant sous le signe $\sum$ une fonction inconnue.

Pour résoudre la seconde question, c'est-à-dire pour trouver l'expression de la température variable d'un point quelconque du prisme, lorsque la première extrémité o est assujétie à la température fixe zéro, et la seconde extrémité ϖ à la température variable ft, on considérera d'abord le cas très-simple où la température de la seconde extrémité est elle-même fixe mais différente de zéro. Dans ce cas l'état final du système est tel que les températures qui subsisteraient après un temps infini croissent comme les ordonnées d'une ligne droite, depuis la première extrémité jusqu'à la seconde. Nous avons démontré ce lemme dans l'Introduction à la Théorie de la chaleur; c'est l'état invariable vers lequel le système converge de plus en plus. Il est ainsi exprimé $v=\frac{bx}{\varpi}$, ce qui est d'ailleurs une conséquence évidente du principe de la communication de la chaleur. b désigne la température fixe de l'extrémité ϖ.

Quant à l'état variable que précède ce dernier état du prisme, il est facile de le former suivant les principes déja connus. En effet, en désignant par Fx l'état initial du système, la différence $\frac{bx}{\varpi} - Fx$ entre l'état final $\frac{bx}{\varpi}$ et le premier état Fx s'altère continuellement, et de la même manière que si l'état initial du prisme étant $\frac{bx}{\varpi} - Fx$, on assujétissait chacune des deux extrémités à la température fixe zéro; la question ne diffère donc pas de celle que nous avons considérée la première. Il suffit de remplacer dans l'équation (6), la fonction ψr qui répond à l'état initial par celle-ci $\frac{br}{\varpi} - Fr$; nous examinerons plus bas le résultat de cette substitution: mais l'état variable du même solide serait très-différent de celui que l'on vient de considérer si la température de l'extrémité ϖ, au lieu d'être fixe et égale à b variait avec le temps, comme une fonction ft, celle du premier point o étant toujours supposée constante et nulle. Cette seconde question est beaucoup plus composée que la précédente. J'indiquerai d'abord comment elle pourrait être résolue par un procédé que j'ai employé dans d'autres recherches, et qui consiste à placer sous le signe d'intégration définie une fonction indéterminée. Il faut trouver pour cette fonction inconnue une expression qui satisfasse aux conditions proposées; ensuite je montrerai comment on déduit la solution d'une autre considération très-simple qui s'applique aux actions variables de la chaleur.

Nous employons en premier lieu l'expression suivante :

$$v = \sum e^{-i^2 t} \sin.(ix) \alpha_i ,$$

en désignant par α_i une fonction inconnue du temps t qui contient aussi l'indice i; on voit que v deviendrait nulle lorsque $x = \mathrm{o}$, et deviendrait encore nulle lorsque $x = \varpi$. Or pour cette dernière valeur de x la quantité v doit devenir ft, on aura donc

$$(7) \qquad v = \frac{x}{\varpi} ft + \sum \alpha_i e^{-i^2 t} \sin.(ix),$$

il reste à déterminer sous le signe $\sum$ la fonction α_i, en sorte que l'équation différentielle soit satisfaite, et que la valeur de v se réduise à zéro lorsqu'on fait $t = \mathrm{o}$: car dans cette question les températures initiales intermédiaires sont supposées nulles. Or l'équation différentielle est

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{dv}{dt},$$

ce qui donne, d'après la dernière expression de v,

$$(8) \qquad -\sum i^2 \alpha_i e^{-i^2 t} \sin.(ix) = \frac{x}{\varpi} f't - \sum \alpha_i i^2 e^{-i^2 t} \sin.(ix) + \sum \frac{d\alpha_i}{dt} e^{-i^2 t} \sin.(ix),$$

donc l'équation différentielle sera satisfaite si l'on a

$$\frac{x}{\varpi} f't + \sum \frac{d\alpha_i}{dt} e^{-i^2 t} \sin.(ix) = \mathrm{o}.$$

C'est par cette condition qu'il faut déterminer la fonction α_i. Or la valeur de x peut être remplacée dans cette dernière équation (8) par l'expression connue

$$x = -2\frac{\sin.(ix)}{i}\cos.(i\varpi),$$

substituant donc cette valeur de x dans l'équation (7), on trouve

$$-\frac{2}{\varpi}f't\sum\frac{\sin.ix}{i}\cos.i\varpi + \sum\frac{d\alpha_i}{dt}e^{-i^2t}\sin.ix,$$

ce qui aura lieu si l'on a

$$e^{-i^2t}\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{2}{\varpi}f't\frac{1}{i}\cos.(i\varpi).$$

On prendra donc pour la fonction α_i l'intégrale

$$(9)\quad \frac{2}{\varpi}\frac{1}{i}\cos.(i\varpi)\int dte^{i^2t}f't,\ \text{ou}\ \frac{2}{\varpi}\frac{1}{i}\cos.i\varpi\left\{c+\int_0^t dre^{i^2r}f'r\right\},$$

en désignant par c une constante arbitraire, et prenant l'intégrale par rapport à la quantité auxiliaire r depuis $r=0$ jusqu'à $r=t$, on aura donc

$$(10)\quad v = \frac{x}{\varpi}ft + \frac{2}{\varpi}\sum\cos.(i\varpi)\frac{\sin.ix}{i}e^{-i^2t}\left\{c+\int_0^t dre^{i^2r}f'r\right\};$$

faisant $t=0$ dans cette expression de v, elle doit, selon l'hypothèse devenir nulle. On aura donc

$$\frac{2}{\varpi}f0 + \sum\frac{\cos.(i\varpi)\sin.(ix)}{i} = 0,$$

et mettant pour x sa valeur

$$-2\frac{\sin.(i\varpi)}{i}\cos.i\varpi,$$

on a

$$-\frac{2}{\varpi} f o \sum \frac{\sin. i x}{i} \cos. i\varpi + \frac{2c}{\varpi} \sum \frac{\sin. i x}{i} \cos. i\varpi = o\,;$$

par conséquent la constante c est égale à fo, donc l'expression cherchée de v est

$$(11)\quad v = \frac{x}{\varpi} ft + \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin. i x}{i} \cos. i\varpi\, e^{-i^2 t} \left\{ fo + \int_0^t dr\, e^{i^2 r} f'r \right\}.$$

On parvient ainsi à résoudre la seconde question que nous avons énoncée ; quant à la troisième elle se rapporte à la seconde puisque les températures respectives des extrémités o et ϖ sont, pour la seconde, zéro et ft, et pour la troisième, φt et o. La solution de cette troisième question est exprimée comme il suit :

$$(12)\quad v = \frac{\varpi - x}{\varpi} \varphi t - \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin. i x}{i} e^{-i^2 t} \left\{ \varphi o + \int_0^t dr\, e^{i^2 r} \varphi' r \right\},$$

formule qui dérive aussi de la précédente (11) en substituant $\varpi - x$ au lieu de x.

Si l'on réunit les trois résultats précédents, on trouve pour solution générale la formule donnée l'équation (1). La première ligne se rapporte à la seconde question, la seconde ligne à la troisième question, et la troisième ligne à la première question.

Quoique l'on puisse en effet parvenir à la solution, en déterminant comme on vient de le faire la fonction inconnue α_i sous le signe $\sum$, on peut dire que ce procédé n'éclaire point assez la question, en ce que l'on ne voit pas d'abord qu'il doit nécessairement conduire à la solution. Il ne sera point inutile, dans une matière encore nouvelle d'envisager les mêmes résultats sous divers points de vue, et surtout d'indiquer la route que l'on a suivie effectivement pour découvrir la solution ; l'article suivant fait connaître comment on s'est dirigé dans cette recherche.

(6)

Principe dont on a déduit la solution générale.

La question principale se réduit à trouver l'expression v de la température, lorsque la première extrémité du prisme au point o étant retenue à la température zéro, la seconde extrémité au point ϖ est assujétie à la température variable ft; car il suit évidemment des principes de la théorie que la superposition des trois états du prisme, indiqués dans l'article 4 donnera la solution générale. Concevons que le point o est retenu à la température zéro, et que la température du point ϖ change par degrés. Si cette température du point ϖ était fixe et égale à b la question n'aurait aucune difficulté, comme nous l'avons remarqué article 5 ; l'objet de la recherche se réduit donc à trouver le changement qu'il faut apporter à la solution exprimée par l'équation (6), pour que cette solution représente l'état variable qui se formerait si la température du point ϖ, au lieu d'être constante et égale à b était représentée par bft. Supposons que le temps T soit partagé en une multitude de parties t_1, t_2, t_3; on assujétit d'abord l'extrémité o du prisme à la température zéro, et l'extrémité ϖ à une température fixe b. On détermine l'état ou le solide est parvenu après le temps t_1; on considère ensuite cet état que l'on vient de déterminer comme l'état initial où se trouve le solide, lorsqu'on commence à assujétir la seconde extrémité ϖ à une autre température fixe $b_1 + b_2$. Cette seconde disposition subsiste pendant le temps t_2, et pendant ce même temps t_2, la première extrémité o demeure assujétie à la température zéro. On détermine, l'état ou le prisme est parvenu à la fin du second temps t_2, et l'on considère ce dernier état comme l'état initial du système au commencement du temps t_3; on assujétit pendant cette durée t_3 les extrémités o et ϖ aux températures respectives zéro et $b_1 + b_2 + b_3$; on détermine encore l'état du système à la fin du temps t_3, et l'on continue ainsi de considérer comme état initial celui que l'on a déterminé par l'opération précédente; on augmente d'une nouvelle partie la température fixe à laquelle l'extrémité est assujétie et l'on suppose que cette disposition dure pendant une nouvelle partie du temps; il est manifeste que l'on parviendrait ainsi à connaître l'état qui aurait lieu après le temps total $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 +$ etc. Il ne reste plus qu'à supposer que les accroissements progressifs de la température de la seconde extrémité sont infiniment petits ainsi que l'élément du temps dt et que la valeur de l'accroissement est $dt f'\,t$. Il faut examiner attentivement les résultats de ce calcul.

(7)

Application de ce principe, calcul.

Le système des températures initiales dans tous les points intermédiaires du solide depuis o jusqu'à ϖ étant exprimé par Fx; si les extrémités o et ϖ sont respectivement assujéties pendant un temps donné au températures fixes o et b, l'état du solide à la fin du temps θ, sera exprimé ainsi

$$(13)\quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi} \frac{2}{\varpi} \sum e^{-i^2\theta} \sin.(ix) \int_0^\varpi d\alpha \sin.(i\alpha) \left(\frac{b\alpha}{\varpi} - F\alpha\right),$$

cette solution résulte évidemment des principes connus. L'état final et invariable dont le système s'approche continuellement est $\frac{bx}{\varpi}$, et la différence entre ce dernier état et le premier φx diminue continuellement et finit par s'évanouir. Cette altération progressive de l'état initial représenté par $\frac{bx}{\varpi} - Fx$ s'opère suivant la loi que l'on observerait, si dans un prisme dont les températures initiales sont données on assujétissait chacune des extrémités à la température fixe zéro.

Nous supposerons maintenant dans tout ce qui suit que les températures initiales des points du prisme qui ont été désignées dans l'équation (13) par la fonction F sont nulles et que les extrémités o et ϖ sont retenues pendant le temps θ à des températures fixes savoir, zéro au point o, et b au point ϖ, on omettra donc dans l'èquation (13) le terme $F\alpha$, et l'on trouvera

$$(14)\quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi} - \frac{2}{\varpi} \sum e^{-i^2 t} \sin.(ix) \int_0^\varpi d\alpha \sin.(i\alpha) \frac{b\alpha}{\varpi},$$

et si l'on effectue l'intégration $\int_0^\varpi d\alpha \sin.(i\alpha) \frac{b\alpha}{\varpi}$, afin de développer sous le signe $\sum$, on a

$$(15)\quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi} - \frac{2b}{\varpi}\left(e^{-\theta} \sin.x - \tfrac{1}{2} e^{-2^2\theta} \sin.2x + \tfrac{1}{3} e^{-3^2\theta} \sin.3x - \text{etc.}\right);$$

on appliquera cette équation (15) au cas où le temps écoulé est désigné par t_1 et la température fixe du point ϖ par b_1, et l'on aura

$$(16)\quad V_{t_1} = \frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2 b_1}{\varpi}\left(e^{-t_1}\sin.x - \tfrac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin.2x \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{3}e^{-3^2 t_1}\sin.3x - \text{etc.}\right).$$

On considère maintenant l'état exprimé par V_{t_1} comme un état initial donné, et l'on assujétit pendant le temps t_2 les deux extrémités o et ϖ aux températures respectives o et $b_1 + b_2$; il est facile de connaître l'état qui sera formé à la fin du temps total $t_1 + t_2$. Il faut dans la formule précédente (13) écrire $b_1 + b_2$ au lieu de b, t_2 au lieu de θ, et remplacer la fonction $F\alpha$ qui se rapporte à l'état initial par la fonction que l'on trouve en écrivant dans V_{t_1} au lieu de x la quantité auxiliaire α. On aura donc en désignant par $V_{(t_1+t_2)}$ l'expression de l'état variable à la fin du temps total $t_1 + t_2$,

$$(17)\quad V_{(t_1+t_2)} = \frac{b_1 x}{\varpi} + \frac{b_2 x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2 t_2}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(ix)\left(\frac{b_1\alpha}{\varpi} + \frac{b_2\alpha}{\varpi} - W\right),$$

et il faut mettre pour W sa valeur

$$\frac{b_1\alpha}{\varpi} - \frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-t_1}\sin.\alpha - \tfrac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin.2\alpha + \tfrac{1}{3}e^{-3^2 t}\sin.3\alpha - \text{etc.}\right),$$

il en résulte premièrement qu'une partie de la valeur cherchée de $V_{(t_1+t_2)}$ est

$$\frac{b_1\alpha}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2 t_2}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(i\alpha)\frac{b_2\alpha}{\varpi}.$$

Cette partie exprime d'après l'équation (14), l'état où serait le même solide après le temps t_2, si au commencement de ce temps t_2 les températures des points intermédiaires de o à ϖ étant supposées nulles, on assujétissait les deux extrémités pendant le temps t_2 aux températures respectives o et b_2.

L'autre partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ paraît d'abord plus composée, elle a pour expression

$$(18)\quad \frac{b_1 x}{\varpi}-\frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2 t_2}\sin.i\alpha\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.i\alpha\frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-t_1}\sin.\alpha - \tfrac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin.2\alpha + \tfrac{1}{3}e^{-3^2 t_1}\sin.3\alpha - \text{etc.}\Big),$$

il faudrait donc prendre pour i tous les nombres entiers et effectuer les opérations indiquées.

Or il faut remarquer que si i et j sont des nombres entiers différents, l'intégrale définie $\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(i\alpha)\sin.(j\alpha)$ a toujours une valeur nulle, ce qu'il est facile de vérifier, et ce que nous avons démontré plusieurs fois dans le cours de nos recherches : mais si les nombres i et j sont les mêmes, l'intégrale n'est point nulle, sa valeur est $\frac{1}{2}\varpi$. Nous supposons ces propositions connues; il en résulte que pour combiner toutes les valeurs de i avec celles qui proviennent de la série $e^{-t_1}\sin.\alpha-\frac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin.2\alpha+\frac{1}{3}e^{-3^2 t_1}\sin.3\alpha-\text{etc.}$, il faut omettre toutes les combinaisons pour lesquelles le coefficient i sous le signe $\int_0^{\varpi}$ dans $\sin.(i\alpha)$, est différent du coefficient de α dans un facteur $\sin.(i\alpha)$ qui appartient à un terme de la série, et comme on doit prendre la somme des exposants de e dans les deux termes combinés, on trouve que la seconde partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ est

$$b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\sin. x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)}\sin. 2x + \tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t^2)}\sin. 3x-\text{etc.}\Big),$$

on forme ainsi l'expression complète de la température du solide après le temps t_1+t_2,

$$V_{(t_1+t_2)}=b_2-\frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-t_2}\sin. x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2t_2}\sin.(2x) + \tfrac{1}{3}e^{-3^2t_2}\sin.(3x)-\text{etc.}\Big)$$
$$+b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\sin. x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)}\sin.(2x) + \tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\sin.(3x)-\text{etc.}\Big),$$

et l'on voit que la seconde partie représente d'après l'équation (14) l'état où le système des températures se trouverait si les valeurs initiales de ces températures étant supposées nulles, on assujétissait pendant le temps total t_1+t_2 les deux extrémités o et ϖ du prisme à des températures fixes savoir, zéro pour l'une au point o et pour l'autre b_1 au point ϖ.

Il faut maintenant considérer cette valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ comme exprimant un état initial et assujétir l'extrémité ϖ pendant une nouvelle partie t_3 du temps à la température fixe $b_1+b_2+b_3$, l'extrémité o étant toujours retenue à la température zéro. Dans l'équation générale (13) on fera $\theta=t_3$ et $b=b_1+b_2+b_3$, et l'on prendra pour $F\alpha$ la valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ dans laquelle on écrira α au lieu de x. On aura donc en désignant par $V_{(t_1+t_2+t_3)}$ l'expression de la température à la fin du temps total $t_1+t_2+t_3$

$$(19)\quad V_{(t_1+t_2+t_3)} = b_1\frac{x}{\varpi} + b_2\frac{x}{\varpi} + b_3\frac{x}{\varpi}$$
$$-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t_3}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha\sin.(i\alpha)\left(b_1\frac{x}{\varpi} + b_2\frac{\alpha}{\varpi} + b_3\frac{\alpha}{\varpi} - W_\alpha\right).$$

On désigne ici par W_α l'expression de $V_{(t_1+t_2)}$ dans laquelle on écrit α au lieu de x. On voit d'abord qu'une première partie de la valeur cherchée $V_{(t_1+t_2+t_3)}$ est

$$b_3\frac{x}{\varpi} - \frac{x}{\varpi}\sum e^{-i^2 t_3}\sin.(i\alpha)\int_0^{\varpi} d\alpha\sin.(i\alpha)b_3\frac{\alpha}{\varpi}.$$

C'est d'après l'équation (14) l'expression de l'état où le prisme se trouverait après le temps t_3, si en supposant les températures initiales nulles, on retenait les deux extrémités o et ϖ et pendant le temps t_3 à des températures fixes savoir, zéro au point o et b_3 au point ϖ.

Il reste a connaître les autres parties de la valeur cherchée. Or W_α contient les deux termes $b_2\frac{\alpha}{\varpi}$, $b_1\frac{\alpha}{\varpi}$, ce qui détruit deux des termes placés à la suite de $\int_0^{\varpi} d\alpha\sin.(i\alpha)$; on a donc seulement a considérer cette expression

$$(20)\quad -\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t_3}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha\sin.(i\alpha)$$
$$\frac{2b_2}{\varpi}\left(e^{-t_2}\sin.\alpha - \tfrac{1}{2}e^{-2^2 t_2}\sin.2\alpha + \tfrac{1}{3}e^{-3^2 t_2}\sin.3\alpha - \text{etc.}\right)$$
$$+\frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-(t_1+t_2)}\sin.\alpha - \tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)}\sin.2\alpha + \tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\sin.3\alpha - \text{etc.}\right).$$

On doit donner au nombre entier i toutes ses valeurs possibles, et combiner chacun des termes qui en proviennent avec chacun des termes des deux séries placées à la suite. Lorsque la valeur de i diffère du coefficient de α dans un terme de la série, il faut omettre le résultat parce que sa valeur est nulle; mais si le nombre i est le même que le coefficient de α, la valeur de l'intégrale est $\frac{1}{2}\varpi$. On aura donc en ajoutant les exposants de e l'expression

$$-\frac{2}{\varpi}b_2\Big(e^{-(t_2+t_3)}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2(t_2+t_3)}\sin.2x+\tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_2+t_3)}\sin.3x-\text{etc.}\Big)$$
$$-\frac{2}{\varpi}b_1\Big(e^{-(t_1+t_2+t_3)}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3)}\sin.2x+\tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2+t_3)}\sin.3x-\text{etc.}\Big).$$

par conséquent la valeur complète de $V_{(t_1+t_2+t_3)}$, est ainsi exprimée

$$(22)\quad V_{(t_1+t_2+t_3)}=b_3\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_3}{\varpi}\Big(e^{-t_3}\sin.x+e^{-2^2t_3}\sin.2x+\text{etc.}\Big)$$
$$+b_2\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-(t_2+t_3)}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_2+t_3)}\sin.2x+\text{etc.}\Big)$$
$$+b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2+t_3)}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3)}\sin.2x+\text{etc.}\Big).$$

On formerait par le même procédé la valeur complète de $V_{(t_1+t_2+t_3+t_4)}$. On aurait ainsi l'expression de l'état où le solide serait parvenu après une nouvelle portion du temps t_4, si à partir de son état à la fin du temps total $t_1+t_2+t_3$, on augmentait d'une nouvelle quantité b_4 la température de l'extrémité ϖ, et si pendant cette nouvelle partie du temps t_4

l'extrémité v étant toujours retenue à la température zéro, l'extrémité ϖ était retenue à la température $b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. La loi qui détermine les états successifs du solide est manifeste; elle donne les conséquences suivantes que nous rapporterons pour exemple à l'équation (22).

(8)

Conséquence remarquable.

Si l'extrémité ϖ eût été assujétie à la température fixe b_1 pendant le temps $t_1 + t_2 + t_3$, et que les températures initiales eussent été nulles, le point o étant retenu à la température zéro, l'état du solide après le temps $t_1 + t_2 + t_3$ serait représenté par la troisième partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2+t_3)}$. Si pour le même solide dont on suppose toujours les premières températures nulles et l'extrémité o à la température fixe zéro, l'autre extrémité ϖ eut été retenue pendant le temps $t_2 + t_3$ à la température fixe b_2, l'état du système à la fin du temps $t_2 + t_3$ serait représenté par la seconde partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2+t_3)}$. Enfin la troisième partie de cette valeur représenterait l'état du même solide à la fin du temps $t_1 + t_2 + t_3$, si les premières températures étant encore supposées nulles on eût assujéti pendant ce temps t_3 l'extrémité ϖ à la température b_3. Ainsi l'état du solide après le temps total $t_1 + t_2 + t_3$ est tel qu'il résulterait de trois causes séparées qui s'appliqueraient à un même prisme dont les premières températures seraient nulles; et ces causes partielles sont la partie b_1 de la température agissant pendant le temps $t_1 + t_2 + t_3$, la partie b_2 agissant pendant le temps $t_2 + t_3$, et la partie b_3 agissant pendant le temps t_3 seulement. Ainsi chaque portion de la température appliquée à l'extrémité ϖ produit son effet comme si elle était seule, et à raison du temps total pendant lequel elle a subsisté. Cette conséquence générale se trouve vérifiée par le calcul; et la loi qu'elle exprime nous conduira sans aucune incertitude à la solution cherchée.

En effet la valeur de $V_{(t_1+t_2+t_3+t_4+\text{etc.})}$ après un temps indéfini, est ainsi composée

$$(23)\quad b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-t_1+t_2+t_3+t_4+\text{etc.}}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$
$$+\,b_2\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_2}{\varpi}\left(e^{-(t_2+t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_2+t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$
$$+\,b_3\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_3}{\varpi}\left(e^{-(t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$
$$+\,b_4\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_4}{\varpi}\left(e^{-(t_4+\text{etc.})}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_4+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right).$$

(9)

Accroissement de la température par degrés infiniment petits, forme de l'intégrale.

Si la température de l'extrémité ϖ varie comme une fonction donnée ft, chaque partie infiniment petite de sa valeur sera $dtf'\,t$, et cette partie demeure appliquée à l'extrémité ϖ pendant le temps $T-t$, en désignant par T le temps total qui s'écoule depuis le premier instant où $t=0$ jusqu'à l'instant pour lequel on veut déterminer l'état du solide. La valeur cherché de V_T sera donc composée d'une infinité de parties, et pour chacune d'elles il faut donner à l'exposant négatif de e dans le terme où entre $\sin.(ix)$ la valeur $i^2(T-t)$, et prendre la somme de toutes ces parties infiniment petites. Si l'on suppose d'abord que la première valeur de ft ou $f0$

est nulle, on a

$$(24)\quad V_t = \frac{x}{\varpi} ft - \frac{1}{\varpi}\int_0^T dt f't \Big(e^{-(T-t)} \sin. x$$
$$- \tfrac{1}{2} e^{-2^2(T-t)} \sin. 2 + \tfrac{1}{3} e^{-3^2(T-t)} \sin. 3x\Big),$$

Le second membre représente l'état du solide après le temps total T, les températures initiales étant supposées nulles, l'extrémité o étant retenue à la température zéro, et l'extrémité ϖ étant assujétie à la température variable ft dont la première valeur fo est nulle. Si cette première valeur fo n'est pas nulle, il faut ajouter au résultat l'effet produit par la température fo pendant le temps total T, c'est-à-dire la quantité

$$\frac{x}{\varpi} f\mathrm{o} - \frac{2}{\varpi}\Big(f\mathrm{o}\, e^{-T} \sin. x - \tfrac{1}{2} e^{-2^2 T} \sin. 2x + \tfrac{1}{3} e^{-3^2 T} \sin. 3x - \text{etc.}\Big),$$

donc la valeur complète de V_T est ainsi exprimée

$$V_T = \frac{x}{\varpi}\Big(f\mathrm{o} + \int_0^T dt f't\Big) - \frac{2}{\varpi} e^{-T} \sin. x \Big(f\mathrm{o} + \int_0^T dt f't\Big)$$
$$- \tfrac{1}{2} e^{-2^2 T} \sin. 2x \Big(f\mathrm{o} + \int_0^T dt f' t e^{2^2 t}\Big)$$
$$+ \tfrac{1}{3} e^{-3^2 T} \sin. 3x \Big(f\mathrm{o} + \int_0^T dt f' t e^{3^2 t}\Big) - \text{etc.}$$

Le premier terme $f\mathrm{o} + \int_0^T dt f't$ est la valeur de ft, et si l'on fait T = o dans l'expression de V_t, on trouve pour les températures initiales du système

$$\frac{x}{\varpi}fo-\frac{2}{\varpi}fo\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin.2x+\frac{1}{3}\sin.3x-\frac{1}{4}\sin.4x\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\sin.5x-\text{etc.}\right);$$

quantité qui se réduit à zéro parce que la valeur connue de la série est $\frac{1}{2}x$, ainsi les températures initiales sont en effet nulles comme l'exige le calcul.

(10)

Solution générale.

Si, dans la même hypothèse des températures initiales nulles, on suppose que c'est l'extrémité ϖ qui est retenue à la température constante zéro, tandis que le point o à l'origine est assujéti à une température variable φt, on résoudra par les mêmes principes cette seconde question et l'on déduit aussi la solution de l'équation (24) en écrivant $\varpi-x$ au lieu de x, ce qui donne en désignant par U_T la température variable qui convient à cette seconde question

$$(25)\quad U_T=\frac{\varpi-x}{\varpi}-\frac{2}{\varpi}\Big[e^{-T}\sin.x\Big(\varphi o+\int_o^T dt\varphi' t\Big)$$
$$-\frac{1}{2}e^{-2^2T}\sin.2x\Big(\varphi o+\int_o^T dt\varphi' te^{2^2T}\Big)$$
$$+\frac{1}{3}e^{-3^2T}\sin.3x\Big(\varphi o+\int_o^T dt\varphi' te^{3^2t}\Big)-\text{etc.}\Big].$$

L'expression de V_T sera ainsi représentée

$$(26)\quad V_T=\frac{\varpi-x}{\varpi}-\frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2T}\sin.ix\Big(\varphi o+\int_o^T dt\varphi' te^{i^2t}\Big).$$

Quant à la valeur de U_T, elle prend cette forme

$$(27)\quad U_T = \frac{x}{\varpi} ft + \frac{2}{\varpi} \Sigma\, e^{-i^2 T} \cos.(i\varpi) \sin. i\varpi \left(fo + \int_0^T dt f' t e^{i^2 t} \right).$$

Ces valeurs de V_T et U_T deviennent nulles lorsque $t=o$, quelle que soit la distance x; elles conviennent l'une et l'autre au cas où les températures initiales des points intermédiaires de o à ϖ sont supposées nulles. Si l'on détermine séparément, comme nous l'avons dit article 4, l'état variable d'un prisme égal aux deux précédents, et dont les températures initiales pour tous les points intermédiaires sont représentées par une fonction quelconque ψx, et dont les extrémités o et ϖ sont retenues à la température zéro, on trouve, en désignant par W_T l'expression suivante de l'état où le solide est parvenu après le temps écoulé T,

$$(28)\quad W_T = \frac{2}{\varpi} \Sigma\, e^{-i^2 T} \sin.(ix) \int_0^{\varpi} dr \psi r \sin.(ir).$$

Il ne reste plus qu'a réunir les solutions des trois questions séparées, et l'on a

$$(29)\qquad V_T + U_T + W_T.$$

Ce sont les trois parties de la température cherchée qui avait été désignée par V_T dans les articles 1, 2, etc. On doit mettre pour V_T, U_T, W_T leurs valeurs exprimées, par les équations (26), (27), (28), et l'on réproduit ainsi l'équation (1), qui donne la solution complète de la question proposée. Elle fait connaître quel *est*, après le temps écoulé T, l'état du prisme dont les températures initiales aux points intermédiaires de o à ϖ sont exprimées par ψr, et dont les extrémités o et ϖ sont assujéties aux températures variables φt au point o et ft au point ϖ.

On a prouvé que la valeur de V_T satisfait, 1° à l'équation à différences partielles du mouvement de la chaleur, 2° à l'état initial, 3° aux conditions des extrémités. On a donc établi la vérité de la solution; on a montré aussi article 5, comment on parviendrait à cette solution en déterminant sous le signe Σ une fonction inconnue qui satisfait aux conditions proposées. Enfin on a exposé dans les articles 6, 7, 8, 9, 10, les considérations qui ont fait découvrir la solution, ce qui complète l'analyse de la question.

I. Pour ne pas différer la publication de ce nouveau volume, on n'y comprend que la première partie du présent Mémoire; les autres parties ne tarderont pas à être imprimées : je vais indiquer les matières qui y sont traitées.

II. Le second paragraphe contient l'exposé des conséquences principales de la solution qu'on vient de rapporter. En examinant la formule générale (1), on reconnaît d'abord que la partie du phénomène qui dépend de l'état initial du système change continuellement; cette partie de l'effet produit s'affaiblit de plus en plus, à mesure que le temps augmente. Ainsi lorsqu'il s'est écoulé un temps assez considérable, la disposition initiale, qui est une cause contingente, et que l'on doit regarder comme fortuite, a cessé d'influer sur l'état du système; cet état est celui qui aurait lieu si la disposition initiale était différente. Il n'en est pas de même des causes toujours présentes qui agissent aux extrémités, ou qui dépendent du principe de la communication de la chaleur; elles règlent à chaque instant le progrès du phénomène. Ces conséquences dérivent d'un principe cosmologique qui se présente de lui-même, et qui s'applique à tous les effets de la nature. Mais non-seulement l'analyse mathématique la confirme; elle montre aussi, dans la question actuelle, par quels progrès insensibles et suivant quelle loi l'effet de la disposition primitive s'affaiblit jusqu'à ce qu'il disparaisse entièrement.

On a ensuite appliqué, dans ce même paragraphe, la solution générale aux deux cas les plus différents, savoir : 1° celui où les fonctions qui règlent les températures des deux extrémités sont périodiques, et 2° au cas où ces fonctions sont du nombre de celles qui changent par des différentiations successives, et tendent de plus en plus à devenir constantes, ou le deviennent en effet comme les fonctions algébriques.

Dans le premier cas (celui des fonctions périodiques), le calcul exprime de la manière la plus distincte les changements successifs que subissent les températures, et l'état final du système qui est évidemment périodique. Cette solution confirme celle que j'ai donnée autrefois pour représenter les oscillations de la chaleur solaire dans l'envéloppe du globe terrestre.

Dans le second cas les résultats ne sont pas moins remarquables, et l'analyse en est très-simple. L'état final n'est plus périodique; il a un caractère particulier qu'il est facile de reconnaître, parce que toutes les intégrations peuvent être effectuées.

III. La troisième partie du Mémoire est historique; elle contient d'abord l'énumération des premières recherches qui, ayant pour objet les propriétés de la chaleur, ont quelques rapports avec la théorie que j'ai formée. Il m'a paru utile d'indiquer toutes les recherches antérieures. Voici les ouvrages que j'ai cités principalement. On a rappelé quelques passages du livre des principes mathématiques de la philosophie naturelle; car il était dans la destinée de ce grand ouvrage d'exposer, ou du moins d'indiquer les causes des principaux phénomènes de l'Uunivers. J'ai dû citer aussi un autre ouvrage de Newton, qui intéresse plus directement la théorie mathématique (*Tabula calorum*). On rappelle ensuite une expérience assez remarquable quoique très-imparfaite d'Amontons; les expériences peu précises mais nombreuses de Buffon; et les vues générales de ce grand écrivain sur l'état primitif du globe terrestre; puis un traité important et très-peu connu, de Lambert, l'un des plus célèbres géomètres de l'Allemagne. De là on passe à des Mémoires d'Euler, d'Émilie du Châtelet, de Voltaire, imprimés dans la collection de l'ancienne Académie des sciences de Paris; car cette illustre compagnie n'a jamais perdu de vue l'étude mathématique des lois de la propagation de la chaleur, et l'avait proposée aux géomètres dès 1738. J'ai cité ensuite un Mémoire remarquable de MM. Laplace et Lavoisier; les recherches de M. Leslie; celles du comte de Rumford; les ouvrages de M. le professeur Prevot, et un écrit de M. Biot, inséré dans un recueil scientifique.

Je n'ai pas borné cette énumération aux recherches expérimentales. Il n'était pas moins utile d'indiquer les résultats analytiques antérieurs qui ont quelques rapports avec la théorie de la chaleur. Dans ce nombre, il faut surtout remarquer une série très-simple donnée par Euler, celles que Daniel Bernoulli appliquait à la question des cordes vibrantes, et une formule que Lagrange a publiée dans ses Mémoires sur la propagation du son.

Les découvertes capitales de D'Alembert sur l'intégration de certaines équations différentielles, et surtout son analyse de la question des cordes vibrantes, avaient ouvert une carrière nouvelle, qui fut agrandie par les recherches d'Euler et de Lagrange. Cette question diffère beaucoup de celle de la distribution de la chaleur; mais les deux théories ont des éléments communs; parce que l'une et l'autre sont fondées sur l'analyse des différences partielles.

J'ai ajouté à ces citations celle d'un Mémoire posthume d'Euler, beaucoup moins connu que les précédents, et qui m'a été indiqué par notre savant confrère, M. Lacroix. Cet écrit a été publié par l'Académie de Pétersbourg, onze ans après la mort d'Euler. Il contient une formule qui dérive de l'emploi des intégrales définies, mais sans aucun examen de la convergence des séries, de la discontinuité des fonctions, ou des limites de la valeur de la variable.

Quoi qu'il en soit, on peut conclure de ces remarques, que les principes de la théorie analytique de la chaleur, loin d'être opposés à ceux que les géomètres avaient employés dans d'autres recherches, s'accordent avec plusieurs résultats précédents. Ceux que l'on vient de citer sont des cas particuliers et isolés d'une analyse beaucoup plus étendue, qu'il était absolument nécessaire de former, pour résoudre les questions, même les plus élémentaires de la théorie de la chaleur. J'ai indiqué aussi, en terminant cette énumération, l'analyse dont M. Laplace s'est servi dans ses recherches sur l'attraction des sphéroïdes. Cette analyse, convenablement modifiée, a des rapports remarquables avec celle qui convient à certaines questions du mouvement de la chaleur. Voilà, autant que j'ai pu les connaître jusqu'ici, les principales formules analytiques dont la publication a précédé mes propres recherches, et qui ont quelque analogie avec les questions que j'ai traitées. Je me borne ici à rappeler ces premiers résultats, laissant aux géomètres et à l'histoire des sciences le soin de les comparer avec la théorie que l'on possède aujourd'hui. Il sera nécessaire, si l'on entreprend cette discussion, de consulter les derniers ouvrages publiés par Lagrange, et une note de ce grand géomètre, insérée dans ses manuscrits appartenants aux archives de l'Institut de France.

Le caractère principal des nouvelles méthodes d'intégration que j'ai ajoutées à l'analyse des différences partielles, est de s'appliquer à un grand nombre de questions naturelles très-importantes, que l'on avait tenté inutilement de résoudre par les méthodes connues. Celles que j'ai données conduisent à des résultats simples, qui représentent clairement tous les détails des phénomènes

Dans ce troisième paragraphe du Mémoire, on considère la nature des équations déterminées qui appartiennent à la théorie de la chaleur, et l'on a joint à cette discussion quelques remarques sur l'emploi des fonctions arbitraires.

Les exposants des termes successifs des séries qui expriment le mouvement variable de la chaleur dans les corps de dimensions finies sont donnés par des équations transcendantes, dont toutes les racines sont réelles. Il ne serait point nécessaire de démontrer cette proposition, qui est une conséquence, pour ainsi dire évidente, du principe de la communication de la chaleur. Il suffit de remarquer que ces équations déterminées ont une infinité de racines ; car ces racines ne peuvent être que réelles. : s'il en était autrement, les mouvements libres de la chaleur seraient assujétis à des oscillations; ce qui est impossile sans l'action de causes périodiques extérieures.

Il était utile de considérer aussi la proposition dont il s'agit, comme un théorème abstrait fondé sur les seuls principes du calcul, et je l'ai présentée sous ce point de vue dans différentes recherches. Mais cette question n'ayant pas été examinée avec une attention suffisante, on a contesté la vérité de la proposition fondamentale. On a soutenu, pendant plusieurs années, que ces équations transcendantes ont des racines imaginaires, et l'on a cherché à le prouver de différentes manières. Ces objections ayant été réfutées, on a enfin reconnu que la proposition est vraie, et l'on se borne maintenant à en proposer diverses démonstrations. En effet ce théorème a cela de commun avec la plupart des vérités mathématiques, qu'étant une fois connues, on en peut aisément multiplier les preuves.

En rappelant cette discussion dans une partie de mon Mémoire, j'ai eu principalement pour objet de faire connaître toute l'étendue de la proposition, et de remonter au principe dont elle dérive.

Si l'on considère, par exemple, une suite d'enveloppes concentriques de dimensions et de formes quelconques, si l'on donne à ces vases, quelqu'en soit le nombre, des températures initiales arbitraires, et, ce qui augmente beaucoup la généralité de la question, si l'on attribue des capacités spécifiques quelconques aux liquides contenus dans ces vases, en supposant aussi que les facultés conductrices des enveloppes sont arbitraires depuis le premier vase jusqu'à l'enveloppe extérieure qui communique à l'air entretenu à la température zéro, la question du mouvement de la chaleur dans ce système de vases est très- composée ; tous les éléments en sont arbitraires. Or on prouve, et même sans calcul, que les racines des équations déterminées qui conviennent à ces questions sont toutes réelles. Il suffit, pour le conclure avec certitude, de considérer la suite des variations de signes que présentent les valeurs des températures, et les changements qui surviennent dans ce nombre des variations, depuis l'état initial du système jusqu'à l'état final dont il s'approche de plus en plus pendant la durée infinie du phénomène.

Au reste, dans chacune des questions du mouvement de la chaleur, ce théorème sur la nature des racines se déduit aussi de l'analyse générale des équations.

L'application que j'ai faite de cette analyse a donné lieu (19^e^ cahier de l'École polytechnique, pages 382, 383), à des objections qu'il m'avait paru inutile de réfuter, parce qu'aucun des géomètres qui ont traité depuis des questions analogues ne s'est arrêté à ces objections : mais comme je les trouve reproduites dans le nouveau volume de la collection de nos Mémoires (tom. VIII, nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, page 11), cette réfutation est devenue en quelque sorte nécessaire, je l'ai donc insérée dans un article du présent Mémoire. Elle a pour objet de prouver que l'exemple cité par M. Poisson (École polytechnique, 19^e^ cahier, page 383), en alléguant que dans ce cas l'application du théorème serait fautive, donne au contraire une conclusion conforme à la proposition générale.

L'erreur de l'objection provient, 1° de ce que l'auteur ne considère point le nombre infini des facteurs égaux de la fonction e^x ou $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, où le nombre n est infini; 2° de ce qu'il omet dans l'énoncé du théorème le mot *réel*, qui en exprime le véritable sens. (*Voir* Théorie de la chaleur, page 373), et aussi pages 380, art. 312.

Les théorèmes de l'analyse des équations déterminées ne sont nullement restreints aux équations algébriques; ils s'appliquent à toutes les fonctions transcendantes que l'on a considérées jusqu'ici, et spécialement à celles qui appartiennent à la théorie de la chaleur. Il suffit d'avoir égard à la convergence des séries, ou à la figure des lignes courbes dont les limites de ces séries représentent les ordonnées. En général les théorèmes et les méthodes de l'analyse algébrique conviennent aux fonctions transcendantes et à toutes les équations déterminées. Le premier membre peut être une fonction quelconque. Il suffit qu'elle soit propre à faire connaître les valeurs de la fonction correspondantes aux valeurs de la variable, soit que ce calcul n'exige qu'un nombre limité d'opérations, soit qu'il fournisse seulement des résultats de plus en plus approchés, et qui diffèrent aussi peu qu'on le veut, des valeurs de la fonction.

Il y a des cas où la résolution exige que l'on considère toute la suite des fonctions dérivées : il y en a une multitude d'autres où l'examen d'un nombre très-limité de fonctions dérivées suffit pour rendre manifestes les propriétés des courbes que ces fonctions représentent, et pour déterminer les racines. On y parvient, ou par la seule comparaison des signes, ou, pour d'autres cas, par la séparation successive de certains facteurs dans les équations dérivées. La recherche des limites, les relations singulières du nombre des variations de signes avec les valeurs des racines, le théorème dont la règle de Descartes est un cas particulier, et qui s'applique, soit aux nombres des variations de signes, soit aux différences de ces nombres, enfin les règles pour la distinction des racines imaginaires, s'étendent certainement à tous les genres de fonctions. Il n'est pas nécessaire qu'en poursuivant les différentiations, on puisse toujours former une équation dont on sait que toutes les racines sont réelles. Ce serait retrancher une des parties les plus importantes et les plus fécondes de l'art analytique, que de borner les théorèmes et les règles dont nous parlons aux seules fonctions algébriques, ou d'étendre seulement ces théorêmes à quelques cas particuliers. La considération des courbes dérivées successives jointe au procédé que j'ai donné (Société philomatique, année 1820, pages 185, 187), et qui fait connaître promptement et avec certitude si deux racines cherchées sont imaginaires ou réelles, suffit pour résoudre toutes les équations déterminées.

Je regrette de ne pouvoir donner à ces remarques théoriques les développements qu'elles exigeraient. J'ai rapporté plusieurs éléments de cette discussion dans la suite de ce mémoire; elle sera exposée plus complètement dans le traité qui a pour objet l'analyse générale des équations déterminées.

J'ai ajouté à cette même partie du Mémoire quelques remarques sur la question du mouvement des ondes; elles se rapportent aussi à la théorie analytique de la chaleur, parce qu'elles concernent l'emploi des fonctions arbitraires. Le but de ces remarques est de prouver que la question des ondes ne peut être généralement résolue si l'on n'introduit pas une fonction arbitraire qui représente la figure du corps plongé.

Les conditions que supposent les équations différentielles propres à cette question, et les conditions relatives aux molécules de la surface, n'empêchent aucunement l'emploi d'une fonction arbitraire. Ces conditions s'établissent d'elles-mêmes, à mesure que les mouvements du liquide deviennent de plus en plus petits par l'effet des causes résistantes. Le calcul représente ces dernières oscillations, qui s'accomplissent pendant toute la durée du phénomène après que les conditions sont établies. C'est toujours sous ce point de vue qu'il faut considérer l'analyse des petites oscillations, car les résistances dont on fait d'abord abstraction, subsistent dans tous les cas, et finissent par anéantir le mouvement : mais il est nécessaire de ne point particulariser l'état initial.

En effet l'état qui se forme après que la continuité s'est établie dépend lui-même et très-prochainement de la disposition initiale qui est entièrement arbitraire. La continuité est compatible avec une infinité de formes qui différeraient extrêmement du paraboloïde ; et l'on ne peut pas restreindre à cette dernière figure celle du petit corps immergé, sans altérer, dans ce qu'elle a d'essentiel, la généralité de la question. Dans le cas même du paraboloïde, l'état initial du liquide est discontinu, et les premiers mouvements diffèrent de ceux que le calcul représente.

En répondant il y a quelques années à des observations que M. Poisson a publiées au sujet d'un de mes Mémoires (Bulletin des sciences, Société philomatique, année 1818, pages 129, 133), je n'ai pu me dispenser de remarquer que, pour satisfaire à l'étendue de la question des ondes, il faut conserver une fonction arbitraire; et j'ai dû contredire cette proposition, que, quelle que soit la forme du corps plongé, s'il est très-peu enfoncé, on peut remplacer ce petit segment par le paraboloïde osculateur. Il est certain, en effet, que cette substitution de la parabole à une figure quelconque ne peut conduire qu'à un résultat très-particulier. Si l'on ajoute présentement (Nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences, tome VIII, note sur le problème des ondes, pages 216, 217) que c'est la condition de la continuité à la surface qui donne lieu à cette restriction, la conséquence n'est pas plus fondée, parce qu'il y a une infinité de cas où la continuité subsiste, quoique la figure du corps plongé s'écarte beaucoup et dans tous ses éléments de celle du paraboloïde. Les cas où l'auteur reconnaît maintenant que cette substitution ne serait pas permise ne se réduisent point à quelques-uns; ils sont au contraire infiniment variés, et l'analyse donne une solution incomparablement plus générale, qui n'exclut point les conditions relatives à la surface.

IV. Dans la quatrième et dernière partie du Mémoire, on applique la solution générale, qui est l'objet du premier paragraphe, aux principales questions de la théorie de la chaleur. On supposera donc que la capacité spécifique, la conducibilité intérieure ou perméabilité, la conducibilité extérieure qui dépend du rayonnement et de l'action du milieu, ne sont point exprimées par des coefficients entièrement constants, mais que ces qualités spécifiques sont assujéties à des variations qui dépendent de la température, ou de la profondeur, ou de la densité; et l'on se propose de déterminer les changements que ces variations introduisent dans les formules déja connues qui conviennent à des coefficients constants.

Or dans ces diverses questions, par exemple, dans celles du prisme, de la sphère, etc., on reconnaît que le calcul peut se ramener dans les cas les plus composés à l'application de la formule générale (1), qui satisfait à l'équation différentielle du mouvement de la chaleur, et contient trois fonctions arbitraires. C'est pour cette raison que nous avons expliqué avec beaucoup de soin, dans la première partie de notre Mémoire, la solution de cette question fondamentale.

Il est d'abord nécessaire, pour fonder la théorie, de considérer les coefficients spécifiques comme constants, et l'on peut maintenant ajouter au résultat principal un ou plusieurs termes dus aux variations qui seraient indiquées par des expériences précises. Nous avons présenté ces vues, dès l'origine de nos recherches, en 1807, 1808 et 1811, et nous les avons reproduites dans la théorie de la chaleur, pages 46, 598, 599 et 600.

En rappelant ici ce genre de questions, on doit citer surtout un Mémoire que M. Guillaume Libri a présenté à l'Institut de France en 1825, et qui a été imprimé depuis à Florence. L'auteur, qui a cultivé avec le plus grand succès les branches principales de l'analyse mathématique, a traité la question du mouvement de la chaleur dans l'armille, en ayant égard aux petites variations des coefficients: la méthode qu'il a suivie et les résultats auxquels il est parvenu méritent toute l'attention des géomètres. Au reste, cette recherche analytique est fondée sur les observations que l'on doit à MM. Dulong et Petit, et qui ont été couronnées par l'Académie. Elles ne sont pas moins remarquables par les conséquences théoriques que par la précision des résultats.

Nous venons d'indiquer l'objet de cette dernière partie de notre Mémoire. La conclusion générale de ces recherches est que la théorie analytique de la chaleur n'est point bornée aux questions où l'on suppose constants les coefficients qui mesurent la capacité de chaleur, la perméabilité des solides, la pénétrabilité des surfaces. Elle s'étend, par la méthode des approximations successives, et surtout par l'emploi de la solution qui est démontrée dans le premier paragraphe de ce Mémoire, à toutes les perturbations du mouvement de la chaleur.