
MÉMOIRE

Sur la distinction des racines imaginaires, et sur l'application des théorèmes d'analyse algébrique aux équations transcendantes qui dépendent de la théorie de la chaleur.

PAR M. FOURIER.

LE premier article de ce Mémoire fait partie d'un Traité qui ne tardera point à être publié, et qui contient les résultats de mes recherches sur la théorie des équations. On démontre dans ce premier article une proposition relative à l'emploi des fractions continues pour la distinction des racines imaginaires. L'illustre auteur du *Traité de la résolution des équations numériques* avait proposé, ainsi que Waring, pour la détermination des limites, l'usage d'une équation dont les racines sont les différences des racines de l'équation que l'on veut résoudre. Cette méthode est sujette à deux difficultés très-graves qui la rendent inapplicable : l'une consiste dans l'étendue excessive du calcul qui sert à former l'équation aux différences ; la seconde, dans le très-grand nombre des substitutions que l'on aurait à effectuer. J'ai recherché avec le plus grand soin les moyens de résoudre ces deux difficultés, et j'y suis parvenu par deux méthodes différentes, qui font connaître facilement la nature

et les limites des racines. La première est exposée avec beaucoup de détails dans l'ouvrage cité ; la seconde est fondée sur la proposition suivante.

On peut omettre dans tous les cas l'emploi de l'équation aux différences, et procéder immédiatement au calcul des fractions continues qui doivent exprimer les valeurs des racines ; il suffit d'établir ce calcul de la même manière que si l'on était assuré que toutes les racines sont réelles. On détermine sur-le-champ, et par l'application d'un théorème général, combien on doit chercher de racines dans chaque intervalle donné ; or on distinguera par le résultat même de l'opération celles de ces racines qui sont réelles. Quant au nombre des racines imaginaires, il est précisément égal au nombre des variations de signes qui disparaissent dans les équations successives. Le Mémoire contient la démonstration de cette dernière proposition ; il en résulte une méthode très-simple pour distinguer avec certitude les racines imaginaires, et pour assigner deux limites entre lesquelles chacune des racines réelles est seule comprise.

Le second article du mémoire concerne les équations que l'on a appelées transcendentes. Je démontre que les théorèmes généraux d'analyse algébrique s'appliquent aux équations de ce genre que présentent la théorie de la chaleur ou d'autres questions naturelles. Le principe sur lequel cette application est fondée consiste en ce que, dans toute équation algébrique ou transcendente formée d'un nombre fini ou infini de facteurs, parmi lesquels il se trouve un ou plusieurs facteurs du second degré ayant deux racines imaginaires, chacun de ces derniers facteurs correspond à une certaine valeur *réelle* qui indique deux racines imaginaires, parce qu'elle fait disparaître deux variations de signes à la fois ; et l'on prouve que si l'équation

proposée n'a aucune de ces valeurs *réelles et critiques*, il est impossible qu'elle n'ait pas toutes ses racines réelles. En général c'est une même méthode qu'il faut employer, soit pour distinguer les racines imaginaires dans les équations algébriques et pour calculer les valeurs de leurs racines réelles, soit pour distinguer les racines imaginaires des équations transcendantes et calculer leurs racines réelles. La convergence des séries qui expriment les fonctions transcendantes supplée à la propriété qu'ont les fonctions algébriques d'être réduites à une constante par des différentiations successives.

On peut faire l'application de ces principes aux équations transcendantes qui servent à former l'expression du mouvement de la chaleur dans la sphère, dans les prismes rectangulaires, et dans le cylindre. J'ai rappelé les trois procédés différents dont je me suis servi, dans mes recherches analytiques sur la chaleur, pour résoudre les équations dont il s'agit; ils donnent tous les trois le même résultat :

1° On emploie les constructions géométriques, parce qu'elles font connaître très-clairement les limites de chaque racine.

2° J'ai démontré que toutes les racines des équations trigonométriques qui se rapportent à la sphère ou aux prismes sont réelles, en substituant à la place de la variable un binôme dont le second terme est imaginaire. On voit, par le résultat de cette substitution, que le coefficient du second terme est nécessairement nul.

3° On démontre aussi que les équations trigonométriques dont il s'agit ont toutes leurs racines réelles, sans qu'il soit nécessaire de regarder comme connue la forme des racines imaginaires; car la fonction trigonométrique est le produit

d'un nombre de facteurs qui croît de plus en plus, et sans limites. Or j'ai prouvé rigoureusement que chacune des équations successives qui en résulte ne peut avoir que des racines réelles. Cette propriété est totalement indépendante du nombre des facteurs.

Il me reste à indiquer l'objet du troisième article du Mémoire. Cet objet a un rapport plus sensible avec les phénomènes naturels; il concerne la question du mouvement séculaire de la chaleur dans l'intérieur du globe terrestre.

Nous avons dit que l'expression du mouvement de la chaleur dans la sphère, dans les prismes rectangulaires et dans le cylindre, contient les racines d'une équation transcendante déterminée, et que toutes ces racines sont réelles. Il est facile maintenant de donner différentes démonstrations de cette proposition, et toutes les recherches ultérieures n'ont pu que la confirmer. Mais quelle est la cause naturelle de cette propriété? pour quelle raison physique est-il impossible qu'il entre des expressions différentes dans les solutions données par le calcul? quel rapport nécessaire y a-t-il entre le principe de la communication de la chaleur, et un théorème abstrait sur la nature des équations?

On résoudra clairement cette dernière question, en considérant ce qui aurait lieu si l'équation qui détermine les exposants de chaque terme, contenait des facteurs du second degré dont les deux racines seraient imaginaires. En effet chacun de ces derniers facteurs pourrait servir à former une solution particulière de la question, et cette solution contiendrait la valeur du temps sous les signes trigonométriques; il en résulterait que la température moyenne du solide correspondante à chaque instant serait exprimée par une quan-

tité périodique. Cette expression serait formée d'un facteur exponentiel et d'un facteur trigonométrique variable avec le temps. La température fixe du milieu étant supposée celle de la glace fondante, la température moyenne du solide serait successivement positive, nulle, et négative; ensuite, en continuant de changer, elle deviendrait de nouveau égale et supérieure à celle du milieu. Ces alternatives se reproduiraient durant un temps infini divisé en mesures égales, comme il arrive dans les dernières oscillations des lames ou des surfaces sonores. Or de tels effets ne peuvent avoir lieu, et, pour rendre cette impossibilité manifeste, il suffit d'appliquer la solution dont on vient de parler, au cas où la conductibilité propre du solide a une valeur immensément grande; car si le coefficient qui mesure cette qualité spécifique ou la perméabilité intérieure acquiert une valeur infiniment grande, le corps dont la température varie doit être comparé à un vase contenant un liquide perpétuellement agité, et dont toutes les parties ont à chaque instant la même température. Il est évident que, dans ce cas, la chaleur du liquide se dissipe continuellement à travers l'enveloppe. On ne peut pas supposer que la température devient alternativement négative, nulle et positive, et que cela constitue le dernier état du vase durant un temps infini. Nous connaissons avec certitude en quoi consiste ce dernier état. La température du vase se rapproche de plus en plus de celle du milieu; la chaleur, quelle que puisse être sa nature, n'est point sujette à cette fluctuation que nous avons décrite, parce qu'elle ne se communique que par voie de partage; par conséquent la température finale est toujours plus grande, ou est toujours moindre que celle du milieu. Ainsi il est physi-

quement impossible qu'il entre des exposants imaginaires, ou, ce qui est la même chose, des facteurs périodiques, dans l'expression de la température variable d'un solide, par exemple d'un cylindre primitivement échauffé, et placé dans un milieu dont la température est constante. Il en résulterait un état final oscillatoire contraire au principe de la communication de la chaleur, et l'on est assuré que ces alternatives n'ont point lieu dans un corps solide, parce que la solution qui les exprimerait s'appliquerait aussi à un état très-simple où elles sont manifestement impossibles.

On arrive à la même conclusion, si l'on considère dans la théorie analytique des mouvements de la chaleur les relations qui doivent subsister entre les divers éléments du calcul, pour qu'une même solution convienne à une multitude de questions différentes; car on peut changer à son gré les valeurs des coefficients spécifiques et les dimensions du solide, si l'on change aussi, et dans un certain rapport, l'unité de mesure des temps écoulés.

Voici une application remarquable de ce nouveau principe : elle concerne la distribution de la chaleur dans les corps de figure semblable qui ne diffèrent que par leurs dimensions. Que l'on se représente deux solides dont les divers points ont reçu des températures initiales. Chacun de ces corps peut n'être pas homogène; la densité, la capacité de chaleur, la conducibilité, pourraient varier d'une manière quelconque dans l'intérieur de ces corps ou à leur surface: mais, pour ne comparer que les deux effets qui proviennent de la différence de dimensions, on suppose que les deux corps, de surface convexe, ont des figures semblables; que les molécules homologues sont de même nature, de même

densité; qu'elles ont reçu la même température initiale; et que les deux solides sont ensuite exposés dans le vide, et séparément, à l'action constante d'une même cause qui absorbe la chaleur émise. On conçoit que chacun de ces deux corps passe successivement par une suite d'états très-différents du premier, et il est manifeste que les changements de température s'accompliraient beaucoup plus rapidement dans celui des deux corps dont la dimension serait beaucoup plus petite. Or nous démontrons que si l'on mesure les temps écoulés avec deux unités différentes dont le rapport soit celui du carré des dimensions homologues, on trouvera que l'état variable du premier solide est perpétuellement le même que l'état du second. Cette proposition est la plus générale de toutes celles que j'ai démontrées dans mes recherches sur la chaleur; car elle ne dépend ni de la forme des corps, ni de la nature de la substance dont ils sont formés, ni de la distribution initiale. En général la durée des temps nécessaires pour que des solides semblables, et semblablement échauffés, parviennent au même état, est en raison directe du carré des dimensions.

Cette proposition s'applique au mouvement séculaire de la chaleur qui a pénétré la masse du globe terrestre, aux époques où cette planète a été formée; elle nous donne une juste idée du temps immense qui a dû s'écouler pour qu'une masse d'une aussi grande dimension pût subir un refroidissement sensible. On comparera, au moyen du théorème précédent, les effets qui seraient observés si l'on assujettissait à une température fixe (celle de la glace fondante) les surfaces de deux sphères solides dont l'une aurait un mètre de rayon, et l'autre un rayon égal à celui de la terre. On trouve que

l'effet produit sur la sphère terrestre par un refroidissement qui durerait mille années équivaut précisément à l'effet produit sur la sphère d'un mètre de rayon, par l'action de la même cause qui ne durerait que la douze cent quatre-vingtième partie d'une seconde. On voit par ce résultat que si la terre a possédé, comme l'indiquent les théories dynamiques et un grand nombre d'observations thermométriques, une chaleur primitive qui se dissipe progressivement dans les espaces planétaires, la déperdition de cette chaleur d'origine s'opère avec une lenteur extrême. La durée de ces grands phénomènes répond aux dimensions de l'univers; elle est mesurée par des nombres du même ordre que ceux qui expriment les distances des étoiles fixes.

Cette question du mouvement séculaire de la chaleur dans le globe terrestre est éclairée par deux propositions très-générales que nous fournit la théorie de la chaleur, et qui sont faciles à démontrer : l'une est celle que nous venons d'énoncer concernant les changements de température des corps semblables; l'autre est l'équation différentielle du mouvement de la chaleur à la surface d'un corps quelconque. Cette dernière proposition, que j'ai donnée autrefois, est, comme la précédente, totalement indépendante de l'état intérieur du globe, de la nature des substances, de la chaleur actuelle ou originaire; elle convient à tous les corps solides, quels que soient leur forme et l'état physique de la superficie.

Nous terminerons cet extrait en rapportant la démonstration du théorème relatif au mouvement de la chaleur dans les corps semblables. On pourrait déduire cette proposition des équations différentielles que j'ai données dans mes recherches précédentes : mais la démonstration synthétique

fait mieux connaître que ce théorème est une conséquence évidente du principe de la communication de la chaleur. J'indiquerai d'abord comment ces conséquences se sont présentées pour la première fois à l'inspection des formules qui expriment le mouvement de la chaleur dans différents corps. Ensuite je montrerai comment on arrive aux mêmes résultats sans l'emploi du calcul et par les considérations les plus élémentaires. Nous prenons pour exemple la question du mouvement de la chaleur dans une sphère qui a été plongée une ou plusieurs fois dans un milieu échauffé, et a reçu ainsi dans les différentes couches sphériques dont elle est formée des températures initiales différentes d'une couche à une autre suivant une loi quelconque, mais égales pour les points d'une même couche. Nous supposons qu'après avoir retiré cette sphère du milieu échauffé, on assujettit les points de la surface à une température constante et commune à tous ces points. On trouve dans le chapitre v de *la théorie de la chaleur* la solution des questions de ce genre, soit qu'on la déduise de la formule générale rapportée page 350 de cet ouvrage, soit qu'on résolve directement ce problème, qui, aujourd'hui, ne présente aucune difficulté. On obtient l'expression suivante des températures variables de la sphère :

$$v = \frac{2}{X} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left\{ \sin. \left(i\pi \frac{X}{x} \right) e^{-\frac{k}{cd} \frac{i^2 \pi^2}{X^2} t} \int_0^X d\alpha F \alpha \sin. \left(\frac{i\pi \alpha}{X} \right) \right\}$$

Les coefficients k, c, d représentent respectivement la conductibilité propre, la capacité de chaleur, la densité; X est le rayon total de la sphère, x est le rayon de la couche sphérique dont on veut déterminer la température v , et t

mesure le temps écoulé depuis l'instant où le refroidissement commence, jusqu'à l'instant où la température prend la valeur désignée par v . $F\alpha$ est la température initiale de la couche sphérique dont le rayon est α ; le signe $\int_0^X$ indique, selon notre usage, que l'intégrale définie est prise entre les limites 0 et X ; et le signe $\sum_{i=1}^{\infty}$ indique que l'on doit attribuer au nombre entier i toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à l'infini et prendre la somme de tous les termes.

Cela posé, concevons que deux sphères solides de différents diamètres, mais formées d'une même substance, ont reçu des températures initiales, telles que la valeur de cette température pour une certaine couche de la moindre sphère est la même que celle de la couche homologue de la plus grande, la fonction $F\alpha$ étant d'ailleurs entièrement arbitraire. Soit n le rapport des dimensions des deux solides, on aura les relations suivantes, en désignant par x et x' les longueurs variables des rayons dans la première sphère, et dans la seconde, qui est la plus grande, $X=nX'$, $x=nx'$, $\alpha=n\alpha'$. Quant à la fonction $F\alpha$, elle est, par hypothèse, la même que $F\alpha'$ ou $F(n\alpha)$; les coefficients k , c , d sont aussi les mêmes pour la sphère dont le rayon total est X et pour celle dont le rayon est X' . Si actuellement on suppose que le temps t , après lequel on mesure les températures de la première sphère, diffère du temps t' , après lequel on mesure les températures de la seconde sphère, et si l'on établit la relation $t=n^2t'$, on trouvera, après toutes les substitutions, que la valeur

de v est la même pour la moindre sphère et pour la plus grande. Il suit de là que, si dans les deux sphères les couches homologues ont reçu des températures initiales quelconques, mais égales entre elles, ces deux solides se trouveront toujours dans un état thermométrique semblable, après des temps écoulés différents pour les deux sphères, et dont le rapport soit celui du carré des dimensions.

Nous allons prouver maintenant que cette dernière proposition est vraie dans le sens le plus étendu; elle ne dépend ni de la forme des corps semblables que l'on compare, ni de leur homogénéité, ou de leurs qualités spécifiques relatives à la chaleur. Voici la démonstration très-simple de ce théorème.

On compare deux corps solides de figure semblable et de forme *convexe*. Cette dernière dénomination s'applique aux figures telles qu'une ligne droite menée entre deux points quelconques de la superficie ne peut rencontrer cette surface du solide en aucun autre point. Il faut concevoir que chacun des deux solides est divisé en une infinité de particules de forme orthogonale. Chaque élément du premier corps correspond à un élément homologue du second. La figure des éléments intérieurs est celle d'un prisme rectangulaire; et chacun des éléments extrêmes, dont une face est placée sur la superficie du corps, a la figure d'un prisme rectangulaire tronqué. On suppose que deux éléments homologues quelconques ont reçu la même température initiale, qu'ils ont la même propriété de conduire la chaleur, et la même capacité spécifique. Au reste, chacun des corps peut n'être point homogène, et toutes les propriétés spécifiques peuvent varier d'une manière quelconque dans l'étendue de chaque solide. On suppose seulement qu'elles sont les mêmes pour les points homologues.

Cela posé, ne considérons, dans les deux corps, que deux éléments semblablement situés, et comparons entre elles les quantités de chaleur qui, pendant une durée infiniment petite, font varier la température de ces deux molécules. Supposons que les deux éléments homologues que l'on compare aient la même température au commencement de cet instant; formons d'abord l'expression de la quantité de chaleur qui pénètre dans une molécule intérieure à travers l'une de ses faces, selon la direction perpendiculaire à cette face. Cette quantité est proportionnelle à l'aire de la face; elle dépend aussi 1° du coefficient k , mesure de la conducibilité, au point du solide que l'on considère; 2° de la durée dt de l'instant; 3° de la cause qui porte la chaleur à passer avec plus ou moins de vitesse à travers la face du prisme. Cette dernière cause est la différence de température des points assez voisins pour qu'ils se communiquent directement leur chaleur. Or nous avons démontré, dans l'introduction de notre théorie analytique, que, pour comparer entre eux les effets de cette dernière cause dans deux solides, il faut élever une perpendiculaire $\mu\nu$ en un point m de la surface que la chaleur pénètre, et marquer sur cette normale de part et d'autre du point m à une distance déterminée $\frac{1}{2}\Delta$ deux points μ et ν , dont on détermine les températures actuelles u et v ; la différence $u-v$ mesure la vitesse du flux, c'est-à-dire celle avec laquelle la chaleur se transporte à travers la surface. Or si l'on marque ici dans les deux corps que l'on compare, ces deux points μ et ν dont la distance est Δ pour l'un et l'autre corps, il est évident que la différence $u-v$ sera plus grande dans le moindre corps que dans le second; et si les dimensions sont dans le rapport de n à n' , les différences $u-v$

et $u' - v'$ seront entre elles dans le rapport de n' à n : ainsi la vitesse avec laquelle la chaleur traverse la première surface est à la vitesse de ce flux pour l'autre surface dans le rapport inverse des dimensions. Nous supposons que le lecteur a une connaissance complète de ce lemme tel qu'il est expliqué et démontré dans divers articles de notre ouvrage (Théorie de la chaleur, chapitre I, section IV et chapitre II, page 134, et section VII du chapitre II, pages 139-148). Concevons maintenant que le transport de la chaleur s'effectue pour l'une des molécules comparées pendant un instant dt , et pour la molécule homologue de l'autre corps pendant une durée différente dt' : les quantités de chaleur qui pénètrent les deux molécules sont entre elles comme les deux produits suivants : $s k \overline{u - v} dt$, $s' k (u' - v') dt'$; s et s' désignent les aires des faces dans les deux prismes. Le coefficient k est commun ; les différences $u - v$, $u' - v'$ sont, comme on l'a dit, dans le rapport de n' à n . Le rapport de s à s' est celui de n^2 à n'^2 , donc les quantités de chaleur qui pénètrent les molécules sont entre elles dans le rapport composé des produits $n^2 k n' dt$, $n'^2 k n dt$, ce rapport est $\frac{n dt}{n' dt'}$. On comparera de la même manière les quantités de chaleur qui sortent de l'une et l'autre molécules prismatiques par les faces opposées à celles que l'on vient de considérer, et le coefficient qui mesure la conducibilité propre étant toujours le même aux points homologues, on trouvera comme précédemment que le rapport des deux quantités de chaleur sorties est $\frac{n dt}{n' dt'}$. Or ce sont les différences de la quantité de chaleur qui entre dans chaque molécule à la quantité qui en sort par les faces oppo-

sées qui déterminent le changement instantané de température de ces molécules. Il s'ensuit que si les quantités de chaleur qui produisent les changements étaient proportionnelles à la troisième puissance de la dimension des deux molécules, c'est-à-dire proportionnelles aux masses, la variation de température serait la même de part et d'autre à la fin des durées différentes dt et dt' . Donc les températures de ces molécules seraient égales entre elles comme elles t' étaient au commencement de ces instants. Il suffit donc que l'on ait cette relation

$$\frac{n dt}{n^3} = \frac{n' dt'}{n'^3} \text{ ou } \frac{dt}{dt'} = \frac{n^2}{n'^2}.$$

Donc si l'on observe le mouvement de la chaleur dans les deux corps en mesurant les temps écoulés avec des unités différentes, et si ces deux unités de temps sont proportionnelles aux carrés des dimensions, les molécules comparées auront toujours des températures égales, après des temps correspondants, c'est-à-dire après des temps formés d'un même nombre d'unités.

Nous avons comparé jusqu'ici deux molécules homologues situées dans l'intérieur des deux corps. La même conséquence s'applique aux molécules extrêmes dont les faces inclinées coïncident avec la superficie du solide. Nous supposons que ces faces extrêmes sont retenues à la température fixe zéro; ou plus généralement nous supposons que l'on assujettit deux particules extérieures et homologues à une même température fixe dont la valeur pourrait être différente pour deux autres particules homologues. Or on reconnaît, comme précédemment, que les quantités de chaleur qui pénètrent les deux molécules extrêmes comparées, sont :

1° en raison directe de l'étendue des surfaces traversées; qu'il en est de même des quantités de chaleur sorties, et par conséquent des différences qui occasionnent le changement de température; 2° que les vitesses du flux sont entre elles comme les différences des températures u et v de deux points, μ et ν dont la distance Δ serait la même dans les deux corps, en sorte que les vitesses de ce flux dans les deux molécules sont en raison inverse de la dimension; 3° que les quantités de chaleur qui font varier la température se partagent entre les masses qui sont proportionnelles aux cubes des dimensions. Donc si les durées dt et dt' des instants sont proportionnelles aux carrés des dimensions, il arrivera toujours qu'à la fin des deux instants différents dt et dt' les températures des deux molécules homologues seront égales entre elles comme elles l'étaient au commencement de ces mêmes instants. Donc les deux corps seront toujours observés dans un état thermométrique semblable, si l'on compte les temps écoulés en faisant usage de deux unités différentes, et si le rapport de ces unités est celui des carrés des dimensions; c'est conformément à cette loi que la température varierait dans deux corps entièrement semblables qui auraient été semblablement échauffés, et dont les surfaces extérieures seraient assujetties à des températures constantes.

Si les solides que l'on compare ne reçoivent point à leur surface des températures fixes, mais si la chaleur se dissipe à travers cette surface, nous ajoutons à l'hypothèse une condition spéciale. On suppose dans ce cas que le coefficient H , mesure de la conducibilité extérieure, n'est pas la même pour les deux corps, mais qu'on lui attribue des valeurs H et H' en raison inverse des dimensions. Ainsi le plus petit

des deux corps aura une conducibilité extérieure H plus grande que H' qui mesure la conducibilité extérieure du second. Il en résulte que deux particules homologues placées à la surface perdront, dans le milieu qui les environne, des quantités de chaleur inégales. La vitesse du flux *extérieur* dans le moindre corps sera plus grande que dans le second, et le rapport de ces vitesses sera celui de n' à n . Il en sera de même du flux *intérieur*, comme on la vu dans le cas précédent. Les aires de deux éléments homologues de la surface seront proportionnelles aux carrés des dimensions. Donc toutes les conséquences seront les mêmes que pour les molécules intérieures : donc en mesurant les temps écoulés avec des unités différentes dont le rapport sera celui du carré des dimensions, on trouvera toujours les deux solides dans un état thermométrique semblable après des temps correspondants.

Il faut remarquer que la condition relative au coefficient H , mesure de la conducibilité extérieure, s'accorde avec l'hypothèse principale, qui consiste en ce que deux points homologues quelconques ont les mêmes propriétés spécifiques et une même température initiale. En effet, quelle que puisse être la cause qui fait passer la chaleur du solide dans le milieu environnant, il est certain que cette cause affecte jusqu'à une profondeur très-petite l'enveloppe extérieure du solide. Les points extrêmement voisins de la surface contribuent tous à l'émission de la chaleur, et l'effet produit est d'autant plus grand, que la température de ces points est plus élevée au-dessus de celle du milieu supposée constante. Il s'ensuit que, dans le plus petit des deux solides comparés, les molécules extrêmement voisines de la surface ont plus d'action sur le milieu; car si l'on marque dans ce moindre solide sur une droite N

un point intérieur μ , distant de la superficie d'une très-petite quantité δ , et dans l'autre solide sur la ligne homologue N' un point intérieur μ' distant de la superficie de la même quantité δ , l'excès de la température de μ' sur celle du milieu sera plus grand que l'excès de la température de μ sur celle du milieu, et par conséquent l'émission de la chaleur à la surface du moindre corps sera plus rapide qu'à la surface du plus grand.

Toutefois nous ne connaissons point assez distinctement la nature des forces qui, à la superficie des solides, modifient l'émission ou l'introduction de la chaleur, pour réduire à un calcul exact les effets de ce genre. C'est pour cela que dans l'énoncé du théorème nous comprenons une condition spéciale relative à la valeur du coefficient. C'est pour la même raison que nous avons considéré seulement les corps dont la superficie est convexe. Si des portions de la superficie étaient concaves, et si la chaleur se dissipait par voie d'irradiation, elle se porterait sur d'autres parties du même solide. Nous n'examinons point ici les cas de ce genre, et nous supposons que les valeurs de H et H' sont en raison inverse de la dimension des solides. Au reste, ce coefficient peut être différent pour différents points de la surface. Il suffit que, pour deux points homologues quelconques des deux surfaces, les valeurs de H et H' soient dans le rapport de n' à n , qui est la raison inverse des dimensions.

Nous avons rapporté plus haut la solution que l'on trouve en intégrant les équations du mouvement de la chaleur dans la sphère; mais nous avons réduit cette solution au cas où la surface est assujettie dans tous les points à une température constante zéro. On a vu comment la formule ainsi ré-

duite s'accorde avec le théorème général que l'on vient de démontrer. On peut aussi considérer le cas plus général où la chaleur du solide se dissipe à travers la surface dans un milieu dont la température est constante. On attribuera au coefficient qui mesure la conducibilité extérieure une valeur déterminée H , et l'on aura pour exprimer les températures variables du solide l'équation suivante :

$$(1) \quad v = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(n_i x)}{x} \frac{e^{-\frac{k}{cd} n_i^2 t}}{X - \frac{1}{2 n_i} \sin(2 n_i X)} \int_0^X d\alpha \cdot \alpha F \alpha \cdot \sin(n_i \alpha),$$

la valeur de n_i est une racine de l'équation déterminée

$$(2) \quad \frac{n_i X}{\text{tang.}(n_i X)} = 1 - \frac{H}{k} X.$$

Les quantités x , v , t , k , c , d , ont la même signification que dans l'article précédent. Le coefficient H exprime la conducibilité de la surface relative au milieu dont la température constante est zéro. La fonction $F\alpha$ représente, comme nous l'avons dit, le système des températures initiales. L'équation (2) donne pour la valeur de n_i , une infinité de racines, et nous avons démontré plusieurs fois, soit par le calcul, soit par des considérations propres à la théorie de la chaleur, que toutes ces racines sont réelles; la température variable v est le double de la somme de tous les termes dont la valeur est indiquée.

Supposons maintenant que l'on compare les mouvements de la chaleur dans deux sphères différentes, dont l'une a pour rayon x et l'autre a pour rayon x' égale à mx . Si la chaleur initiale est tellement distribuée dans ces deux corps, que la température commune aux points d'une surface sphérique

intérieure dans le premier soit égale à la température de la surface semblablement placée dans le second, et si les coefficients k , c , d étant les mêmes, le coefficient H qui appartient à la moindre sphère a dans la plus grande une valeur différente H' , il sera facile de connaître dans quel rapport doivent être les temps écoulés pour que la température v ait une même valeur dans l'une et l'autre sphère. Soient respectivement t et t' , les temps écoulés après lesquels on mesure les températures dans les deux corps, on écrira les relations

$$X' = m X, \quad x' = m x, \quad H' = \frac{H}{m}, \quad t' = m^2 t.$$

On conservera, selon l'hypothèse, les valeurs de k , c , d et F_α , et l'on reconnaîtra que la valeur de v ne change point. Ainsi les temps écoulés étant mesurés avec des unités différentes, et le rapport de ces unités étant celui des carrés des dimensions, les deux sphères seront toujours dans un état thermométrique semblable après des temps exprimés par un même nombre d'unités; ce qui est conforme à la proposition générale.

On pourrait déduire cette proposition de la solution propre à chacune des questions particulières; mais on voit combien il est préférable de rendre la démonstration indépendante des solutions: car il y a un grand nombre de cas où, dans l'état actuel de l'analyse mathématique, on ne pourrait point former explicitement ces solutions; mais la vérité de la proposition générale n'en est pas moins certaine, quelles que puissent être la figure des corps convexes, l'hétérogénéité des masses et leurs propriétés relatives à la chaleur. Les applications des sciences mathématiques présentent certaines

questions rares, à la vérité, que l'on résout par des considérations théoriques très-simples, en obtenant des résultats beaucoup plus généraux que ceux qui se déduiraient d'une analyse difficile. Nous pourrions en citer un exemple non moins remarquable, et que nous n'avons point encore publié; il appartient à l'une des questions les plus importantes de la théorie des probabilités, celle qui concerne la comparaison de l'avantage *mathématique* moyen à l'avantage *relatif*. Au reste, lorsque les principes des théories sont connus depuis long-temps, les conséquences les plus générales sont presque toujours celles que donnent les solutions analytiques.

FIN.