
SUITE DU MÉMOIRE INTITULÉ :

THÉORIE

DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR

DANS LES CORPS SOLIDES;

PAR M. FOURIER.

XII.

Des Températures terrestres, et du Mouvement de la Chaleur dans l'intérieur d'une sphère solide, dont la surface est assujettie à des changemens périodiques de température.

80. APRÈS avoir exposé les lois générales du mouvement de la chaleur dans les corps solides, il ne sera point inutile d'indiquer une des principales applications de cette théorie. On a choisi pour cet objet la question des températures terrestres. Aucune branche de l'étude de la nature ne nous intéresse davantage, et ne peut nous offrir un sujet plus digne de nos recherches. A la vérité, l'examen de cette grande question exigerait des observations exactes et multipliées, qui n'ont point encore été faites; mais on peut maintenant déterminer par le calcul les lois de la propagation de la chaleur dans le

globe terrestre, et ramener à une théorie commune les observations qui ont été recueillies jusqu'ici.

Les différens points de la surface de la terre sont inégalement exposés à l'action des rayons solaires. Les mouvemens que cette planète accomplit sur elle-même et dans son orbite, rendent très-variables les effets successifs de la chaleur du soleil. Si l'on plaçait des thermomètres dans les différens points de la partie solide du globe, immédiatement au-dessous de la surface, on remarquerait des changemens continuels dans chacun de ces instrumens. Ces mouvemens de la chaleur à la surface ont des relations nécessaires avec tous ceux qu'elle éprouve dans l'intérieur du globe. On se propose ici d'exprimer ces relations par l'analyse.

Les grandes variations de la température à la surface du globe sont périodiques : elles se reproduisent et redeviennent sensiblement les mêmes après l'intervalle d'une année. Ainsi la question consiste principalement à déterminer le mouvement de la chaleur dans un globe solide, d'un diamètre immense, dont la surface est assujettie à l'action périodique d'un foyer extérieur. On fait ici abstraction des causes propres qui pourraient faire varier la chaleur dans l'intérieur même de la terre ; car elles n'ont qu'une influence extrêmement bornée sur le système général des températures. Au reste, il convient d'étudier séparément toutes les causes qui concourent aux températures terrestres, et de soumettre d'abord à une analyse rigoureuse les effets des causes principales. En comparant ensuite les résultats du calcul et ceux de l'observation, on distinguera les effets accidentels, et l'on parviendra à déterminer les lois constantes des grands mouvemens que les variations de température occasionnent dans les mers et dans l'atmosphère.

Si l'on suppose que tous les points de la surface d'un globe solide immense soient assujettis, par une cause extérieure

quelconque et pendant un temps infini, à des changemens périodiques de température pareils à ceux que nous observons, ces variations ne pourront affecter qu'une enveloppe sphérique dont l'épaisseur est infiniment petite par rapport au rayon; c'est-à-dire qu'à une profondeur verticale peu considérable la température d'un point aura une valeur constante qui dépend, suivant une certaine loi, de toutes les températures variables du point de la même verticale situé à la surface. Ce résultat important est donné par les observations, et l'on verra aussi qu'il est facile de le déduire de la théorie. Mais il faut remarquer que la valeur fixe de la température n'est point la même lorsqu'on change de verticale, parce qu'on suppose que les points correspondans de la surface éprouvent inégalement l'action du foyer extérieur. Si donc on fait abstraction de l'enveloppe du globe solide, on pourra dire que les divers points de sa surface sont assujettis à des températures constantes pour chacun de ces points, mais inégales pour des points différens. La question consistera maintenant à connaître quel doit être l'état intérieur résultant de l'état donné de la surface. Il faudra représenter par des formules générales le mouvement constant de la chaleur dans l'intérieur de la sphère, et déterminer la température fixe d'un point désigné. On voit, par cet exposé, que nous avons ici deux questions à traiter : dans la première, on considère les oscillations périodiques de la chaleur, dans l'enveloppe de la sphère, à des profondeurs accessibles; et dans la seconde, qui n'intéresse, pour ainsi dire, que la théorie, il s'agit de déterminer les températures fixes et inégales de la partie inférieure du solide qui ne participe point aux perturbations observées à la surface.

81. On supposera donc, en premier lieu, que la surface d'une sphère solide, d'un très-grand diamètre, est assujettie

v*

en ses divers points à des changemens périodiques de température, analogues à ceux que l'on remarque vers la surface de la terre; et l'on déterminera quel est l'effet de ces variations à une profondeur peu considérable.

Il faut d'abord considérer que l'on doit ici faire abstraction du mouvement de la chaleur dans le sens horizontal. En effet, tous les points de la surface qui sont contigus, et compris dans une assez grande étendue, doivent être regardés comme également affectés par les causes extérieures : il en résulte que les points correspondans placés dans l'intérieur à une profondeur peu considérable ont aussi, dans le même instant, des températures sensiblement égales; donc ils se communiquent des quantités de chaleur extrêmement petites. Il n'en est pas de même des points contigus d'une même ligne verticale; leurs températures, prises dans un même instant, diffèrent entre elles de quantités incomparablement plus grandes que celles des points également distans de la surface. Par conséquent, le mouvement de la chaleur qu'il s'agit de connaître, pour une ligne verticale donnée, est sensiblement le même que si tous les points de la surface de la sphère subissaient des changemens périodiques entièrement semblables. Il reste donc à considérer le mouvement de la chaleur dans cette dernière hypothèse. Les points également distans du centre de la sphère conservent alors une température commune ν qui varie avec le temps écoulé t . En désignant par x la distance au centre, on voit que ν est une fonction de x et t qu'il faut déterminer. L'équation $\frac{d\nu}{dt} = \frac{K}{CD} \left(\frac{d^2\nu}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\nu}{dx} \right)$, que l'on a obtenue précédemment (art. 11), représente les variations instantanées des températures dans une sphère solide dont les couches sphériques sont inégalement échauffées, c'est-à-dire que, si l'on donnait actuellement aux points de la sphère placés à la distance x , une température ν , ν étant

une fonction de x donnée, et que l'on voulût connaître le résultat instantané de l'action mutuelle de toutes les particules, il faudrait ajouter à la température de chaque point la différentielle $dt \cdot \frac{K}{CD} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dv}{dx} \right)$. On voit par là que cette équation, que l'on avait trouvée pour le cas où le solide se refroidit librement après son immersion dans un liquide, exprime aussi la condition générale à laquelle la fonction v doit satisfaire, dans la question que l'on traite maintenant. On remplacera la variable x par $X - u$, X désignant le rayon total de la sphère, et u la distance perpendiculaire entre la surface et le point dont la température est v . On obtient par cette substitution, et en considérant X comme un très-grand nombre, $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD} \frac{d^2 v}{du^2}$. On aurait pu parvenir à ce même résultat, en considérant immédiatement le mouvement linéaire de la chaleur dans un solide terminé par un plan infini; mais il y a, dans la question des températures terrestres, divers points que l'on ne peut éclaircir qu'en employant l'équation plus générale qui convient à la sphère.

Il faut ajouter aux remarques précédentes, que l'on peut encore faire abstraction de l'état primitif dans lequel se trouvait le solide lorsqu'on a commencé à assujettir la surface aux variations périodiques de température. En effet, cet état initial a été continuellement changé, et pendant un temps infini, en sorte qu'il s'est transformé progressivement en un autre état, qui ne dépend plus que des températures variables de la surface, et qui est lui-même périodique. La différence entre cet état final et celui qui avait eu lieu au commencement, a diminué de plus en plus, et a disparu d'elle-même entièrement; elle résultait d'une chaleur excédante qui s'est dissipée librement dans l'espace extérieur ou dans le solide

infini. Au reste, ce même résultat, qu'il est facile d'apercevoir *à priori*, se déduit aussi du calcul. Il est exprimé par les formules générales que l'on obtient en ayant égard à l'état initial; et l'on reconnaît facilement que les températures finales du solide sont périodiques, et redeviennent les mêmes après un intervalle de temps égal à celui qui détermine le retour des températures de la surface. Il a paru superflu d'entrer ici dans ce développement.

On voit maintenant que la fonction cherchée v de x et t est périodique par rapport au temps t , et qu'elle satisfait à l'équation générale

$$(e) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD} \frac{d^2 v}{du^2} = k \frac{d^2 v}{du^2}.$$

Elle satisfait aussi, lorsqu'on fait $u = 0$, à l'équation déterminée $v = \Phi(t)$, Φ étant une fonction périodique que l'on suppose connue. C'est au moyen de ces conditions qu'il faut déterminer la fonction v .

La nature de la fonction Φ est telle, par hypothèse, qu'elle ne change point de valeur si l'on écrit $t + \theta$ au lieu de t , θ étant la durée de la période; il doit en être de même de la fonction v .

On satisfait à l'équation (e) en supposant

$$v = a e^{-g u} \cos(2 g^2 k t - g u), \text{ ou } v = a e^{-g u} \sin(2 g^2 k t - g u).$$

Ces valeurs particulières se déduisent de celles que nous avons employées jusqu'ici; il suffit de rendre les exposants imaginaires. Les quantités g et a sont arbitraires. On peut donc exprimer la valeur générale de v par l'équation suivante :

$$(e) \quad v = e^{-g u} [a \cos(2 g^2 k t - g u) + b \sin(2 g^2 k t - g u)] \\ + e^{-g_1 u} [a_1 \cos(2 g_1^2 k t - g_1 u) + b_1 \sin(2 g_1^2 k t - g_1 u)] \\ + e^{-g_2 u} [a_2 \cos(2 g_2^2 k t - g_2 u) + b_2 \sin(2 g_2^2 k t - g_2 u)] \\ + \&c.$$

En supposant $u = 0$, on aura l'équation de condition

$$\begin{aligned}\varphi t &= a \cos 2 g^2 k t + b \sin 2 g^2 k t \\ &+ a_1 \cos 2 g_1^2 k t + b_1 \sin 2 g_1^2 k t \\ &+ a_2 \cos 2 g_2^2 k t + b_2 \sin 2 g_2^2 k t \\ &+ \&c.\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit périodique, et qu'elle reprenne sa valeur lorsqu'on augmente t de l'intervalle θ , il suffit que $2 g^2 k \theta = 2 i \pi$, i étant un nombre entier quelconque. Si on prend pour $g, g_1, g_2, \&c.$ des nombres qui satisfassent à cette condition, la valeur générale de v donnée par l'équation (e) sera périodique aussi, et ne changera point lorsqu'on écrira $t + \theta$ au lieu de t ; car cette substitution ne fera qu'augmenter d'un multiple de la circonférence entière toutes les quantités qui sont sous les signes sinus ou cosinus.

On a donc

$$\begin{aligned}\varphi t &= a + a_1 \cos \left(1 \frac{2 \pi}{\theta} t \right) + b_1 \sin \left(1 \frac{2 \pi}{\theta} t \right) \\ &+ a_2 \cos \left(2 \frac{2 \pi}{\theta} t \right) + b_2 \sin \left(2 \frac{2 \pi}{\theta} t \right) \\ &+ a_3 \cos \left(3 \frac{2 \pi}{\theta} t \right) + b_3 \sin \left(3 \frac{2 \pi}{\theta} t \right) \\ &+ \&c.\end{aligned}$$

La fonction φt étant supposée connue, il sera facile d'en déduire les valeurs des coefficients $a_1, a_2, a_3, a_4, \&c. b_1, b_2, b_3, b_4, \&c.$ On trouvera (voyez article 31)

$$\begin{aligned}\pi a &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \pi}{\theta} \int \varphi t. dt, \pi a_1 = \frac{2 \pi}{\theta} \int \varphi t. \cos \left(\frac{2 \pi}{\theta} t \right) dt, \\ \pi b_1 &= \frac{2 \pi}{\theta} \int \varphi t. \sin \left(\frac{2 \pi}{\theta} t \right) dt; \text{ et en général } \pi a_i = \\ &= \frac{2 \pi}{\theta} \int \varphi t. \cos \left(i \frac{2 \pi}{\theta} t \right) dt, \pi b_i = \frac{2 \pi}{\theta} \int \varphi t. \sin \left(i \frac{2 \pi}{\theta} t \right) dt.\end{aligned}$$

Les intégrales doivent être prises depuis $\frac{2\pi}{\theta}t = 0$ jusqu'à $\frac{2\pi}{\theta}t = 2\pi$, ou depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$. Les coefficients étant ainsi déterminés, et les exposants $g, g_1, g_2, g_3, \dots, g_i, \dots$ étant 0, $\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}$, $\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}$, $\sqrt{\frac{3\pi}{k\theta}}$, $\dots$, $\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}$, $\dots$ il ne reste rien d'inconnu dans la valeur de v . L'équation suivante fournit donc la solution complète de la question :

$$\begin{aligned}
 (E) \quad v = & \frac{1}{\theta} \int \varphi t dt + \frac{2}{\theta} e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}} \left\{ \begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right) \int \varphi t \cos\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right) dt \\ & \sin\left(\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right) \int \varphi t \sin\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right) dt \end{aligned} \right\} \\
 & + \frac{2}{\theta} e^{-u\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}} \left\{ \begin{aligned} & \cos\left(2\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}\right) \int \varphi t \cos\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right) dt \\ & \sin\left(2\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}\right) \int \varphi t \sin\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right) dt \end{aligned} \right\} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \frac{2}{\theta} e^{-u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}} \left\{ \begin{aligned} & \cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right) \int \varphi t \cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right) dt \\ & \sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right) \int \varphi t \sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right) dt \end{aligned} \right\} \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

82. Cette solution fournit diverses conséquences remarquables. Les quantités exponentielles

$e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}}$, $e^{-u\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}}$, $e^{-u\sqrt{\frac{3\pi}{k\theta}}}$, &c., forment une

suite décroissante, et la diminution est d'autant plus rapide que la quantité u est plus grande. Il en résulte que la température des points du solide placés à une profondeur un peu considérable est représentée sensiblement par les deux premiers termes de la valeur de v . En effet, il faut remarquer

que les quantités variables qui multiplient les exponentielles sont toutes affectées des signes cosinus ou sinus ; elles ne peuvent donc acquérir, lorsqu'on fait varier t ou u , que des valeurs comprises entre 1 et -1 . A l'égard des coefficients qui contiennent le signe intégral, ils sont tous constans ; donc les termes successifs de la valeur de v diminuent très-rapidement, si l'on augmente la valeur de u .

En donnant à cette quantité u une certaine valeur U , qu'il est aisé de déterminer, le second terme de la série devient une quantité extrêmement petite, et alors la valeur de v est constante, et demeure ainsi la même pour toutes les profondeurs qui surpassent U . Ainsi l'analyse nous fait connaître que la température des lieux profonds est fixe, et ne participe aucunement aux variations qui ont lieu à la surface.

83. De plus, cette température fondamentale équivaut à $\frac{1}{\theta} \int \phi t. dt$, ϕt représentant la température variable du point de la surface, l'intégrale étant prise de $t = 0$ à $t = \theta$. Donc la température fixe des lieux profonds est la valeur moyenne de toutes les températures variables observées à la surface. Les observations ont donné depuis long-temps les mêmes résultats ; ils se présentent aujourd'hui comme des conséquences évidentes de la théorie mathématique de la chaleur.

84. En désignant par w la différence entre la température moyenne et celle des points qui sont placés à une profondeur u peu différente de U , on aura

$$(E') \quad w = v - \frac{1}{\theta} \int \phi t. dt = e^{-u \sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}} \left\{ 2 \cos \left(2 \frac{\pi t}{\theta} - u \sqrt{\frac{\pi}{k\theta}} \right) \frac{1}{\theta} \int \phi t \cos \left(2 \frac{\pi t}{\theta} \right) dt \right. \\ \left. 2 \sin \left(2 \frac{\pi t}{\theta} - u \sqrt{\frac{\pi}{k\theta}} \right) \frac{1}{\theta} \int \phi t \sin \left(2 \frac{\pi t}{\theta} \right) dt \right\}$$

$= e^{-g u} [a \cos (2 g^2 k t - g u) + b \sin (2 g^2 k t - g u)]$;
 a, b et g ayant les valeurs désignées précédemment par a_1, b_1 et g_1 . Cette dernière équation peut être transformée en celle-ci :

$$w = v - \frac{1}{\theta} \int \phi t. dt$$

$$= e^{-g u} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin (2 g^2 k t - g u + \text{arc tang } \frac{a}{b}).$$

Si maintenant on regarde u comme constante, et que l'on fasse varier t , la quantité w aura pour plus grande valeur

$$e^{-g u} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}. \text{ Donc la température d'un point placé à}$$

une profondeur assez considérable est alternativement plus grande ou moindre que la température moyenne; la différence, qui est très-petite, varie comme le sinus du temps écoulé depuis l'instant où elle était nulle. Le *maximum* de la différence décroît en progression géométrique, lorsque la profondeur augmente en progression arithmétique.

Les différens points d'une même ligne verticale ne parviennent point tous en même temps à la température moyenne, en sorte que, si l'on observait dans le même instant les températures des points d'une verticale, on trouverait alternativement des points plus chauds et des points plus froids. Si l'on veut connaître à quelle distance sont deux points qui parviennent en même temps à la température moyenne, il faut écrire l'équation $\sin (2 g^2 k t - g u + \text{arc tang } \frac{a}{b}) = 0$,

d'où l'on conclut que la différence $u' - u$ entre les profondeurs doit être telle, que l'on ait $g(u' - u) = i \pi$; i étant un nombre entier quelconque. Ainsi deux points dont la distance verticale est $\frac{\pi}{g}$ ont dans le même instant la température moyenne; mais pour l'un cette température est croissante, et pour l'autre elle diminue lorsque le temps augmente.

On voit par-là que chaque point de l'intérieur du globe subit des variations de température analogues à celles que nous observons à la surface. Ces variations se renouvellent aussi après un même intervalle de temps, qui est la durée de l'année; mais elles sont d'autant moindres que les points sont placés à une plus grande profondeur, en sorte qu'elles deviennent insensibles lorsqu'on pénètre dans des souterrains profonds. Chaque point parvient, soit à son *maximum* de chaleur, soit à la température moyenne, à une époque qui dépend de la distance à la surface. Si l'on suivait cette température moyenne depuis l'instant où elle affecte un point donné de l'intérieur du globe, en passant avec elle dans les points inférieurs, on parcourrait la verticale d'un mouvement uniforme.

La durée de la période qui détermine le retour des températures de la surface, influe beaucoup sur l'étendue des oscillations et sur la distance des points qui atteignent en même temps leur *maximum* de chaleur. En effet, la plus grande va-

riation ayant pour valeur $e^{-g^u} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, ou $e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, il s'ensuit que, pour qu'elle demeurât la même

lorsque θ augmente, il faudrait que le quotient $\frac{u}{\sqrt{\theta}}$ ne chan-

geât point de valeur : donc les profondeurs pour lesquelles les plus grandes variations sont également insensibles, dépendent du nombre θ , et elles croissent comme les racines carrées de la durée des périodes. Il en est de même de la distance de deux points d'une même verticale qui atteignent en même temps leur *maximum* de température. Ainsi les petites variations diurnes de la chaleur pénètrent à des distances dix-neuf fois moins grandes que les variations annuelles, et les points qui atteignent en même temps leur *maximum* de la

chaleur du jour sont environ dix-neuf fois moins éloignés que ceux qui parviennent ensemble à leur *maximum* de la chaleur annuelle.

A l'égard de la constante k , qui représente $\frac{K}{cD}$, elle influe selon le même rapport que le nombre θ , et les oscillations de la chaleur sont d'autant plus amples et plus profondes que la masse qui est exposée à son action a une plus grande conductibilité.

Par exemple, si la constante k était infinie, l'état intérieur du solide serait par-tout le même que celui de la surface : on pourrait le conclure aussi de l'analyse précédente ; car, en supposant $k = \frac{1}{0}$ dans l'équation générale (E), tous les termes qui contiennent u disparaissent, quel que soit le temps t ; et la valeur de v est la même que si l'on fait $u = 0$.

Les résultats précédens, déduits de l'équation (E'), n'ont point lieu, en général, lorsque les points sont placés à de très-petites profondeurs : il faut alors employer les termes subséquens de la valeur de v . L'état variable des points voisins de la surface dépend de la fonction périodique qui détermine les températures extérieures ; mais, à mesure que la chaleur pénètre dans le solide, elle y affecte une disposition régulière, qui ne dépend que des propriétés les plus simples des sinus et des logarithmes, et ne participe plus de l'état arbitraire de la surface.

85. Il est facile de connaître les valeurs numériques des quantités que l'on vient de considérer : mais nous ne pouvons appliquer aujourd'hui cette théorie qu'aux substances solides qui ont été l'objet de nos propres expériences ; car ces quantités h et K , qui expriment des qualités spécifiques des corps, n'avaient jamais été mesurées. Nous déterminerons donc les

mouvements périodiques de la chaleur dans un globe de fer d'un très-grand diamètre.

Pour trouver la conducibilité spécifique de cette substance, on a observé les températures fixes des divers points d'une armille de fer exposée à l'action permanente d'un foyer de chaleur. Du rapport constant $\frac{z_2 + z_4}{z_3}$, on a déduit la valeur approchée de $\frac{h}{K}$. Ensuite on a observé le refroidissement d'une sphère solide de fer : on a conclu la valeur numérique de $\frac{h}{CD}$. La comparaison de ces résultats a fourni la valeur de K , qui diffère peu de $\frac{3}{2}$. A l'égard des constantes C et D , on en connaissait déjà les valeurs approchées.

L'unité de longueur étant le mètre; l'unité de temps, une minute; l'unité de poids, un kilogramme; les valeurs approchées de h et K peuvent être exprimées ainsi : $h = \frac{1}{5}$, $K = \frac{3}{2}$. Quant aux valeurs approchées de C et D , on a $C = \frac{5}{24}$, $D = 7800$. L'unité qui sert à mesurer les quantités de chaleur, est la quantité nécessaire pour convertir un kilogramme de glace à la température 0, en un kilogramme d'eau à la même température 0.

Pour calculer l'effet des variations diurnes de la température, il faut prendre $\theta = 1440$ minutes. Si l'on fait ces substitutions, et que l'on cherche la valeur de g ou $\sqrt{\frac{CD\pi}{K\theta}}$, on trouvera qu'en supposant $u = 2^m,3025$, l'exponentielle e^{-g^u} est environ $\frac{1}{1000}$. Par conséquent, à cette profondeur de $2^m,3025$, les variations diurnes seront très-petites. On calculera les variations annuelles de température en

conservant les valeurs précédentes de K , C , D , et prenant $\theta = 365 \times 1440$ minutes : il sera facile de voir que ces variations sont très-peu sensibles à une profondeur d'environ 60 mètres.

Quant à la distance qui sépare deux points intérieurs de la même verticale qui parviennent en même temps à la température moyenne annuelle, elle a pour valeur $\frac{\pi}{g}$, et par conséquent diffère peu de 30 mètres.

Si l'on suivait la température moyenne à mesure qu'elle passe d'un point intérieur du globe à tous ceux qui sont placés au-dessous de lui, on descendrait d'un mouvement uniforme, en parcourant environ 30 mètres en six mois. Les substances qui forment l'enveloppe extérieure du globe terrestre ayant une conducibilité spécifique et une capacité de chaleur différentes de celles du fer, on observe que les variations diurnes ou annuelles deviennent insensibles à des profondeurs moins considérables, et que la propagation de la température moyenne s'opère plus lentement.

L'expérience nous a fait connaître depuis long-temps que la température des lieux profonds est invariable, et qu'elle est égale à la valeur moyenne des températures observées à la surface dans le cours d'une année; que les plus grandes variations des températures, soit diurnes, soit annuelles, diminuent très-rapidement à mesure que la profondeur augmente; que ces dernières pénètrent à des distances beaucoup plus considérables; qu'elles n'ont point lieu en même temps dans les différens points, et qu'à une certaine profondeur les époques des plus grandes et des moindres températures sont entièrement opposées. L'analyse mathématique fournit aujourd'hui l'explication complète de ces phénomènes : elle les ramène à une théorie commune et en donne la mesure exacte. Si ces résultats n'eussent point été connus, nous les déduirions

de la théorie, comme des conséquences simples et évidentes de l'équation générale que nous avons rapportée.

86. Nous allons maintenant indiquer une autre application des formules qui représentent le mouvement périodique de la chaleur dans un globe d'un très-grand diamètre. Il s'agit d'évaluer la quantité totale de chaleur qui, dans un lieu déterminé, pénètre la surface du globe terrestre pendant un an.

On ne peut connaître que par des observations assidues quel est, pour un lieu donné, l'ordre successif des températures, pendant le cours d'une année. A défaut de ces observations, qui n'ont point encore été faites avec une précision suffisante, nous choisirons pour exemple l'effet résultant d'une loi semblable à celle qui s'établit d'elle-même dans l'intérieur du solide. Cette loi consiste en ce que la différence de la température actuelle à la température moyenne augmente proportionnellement au sinus du temps écoulé depuis l'instant où cette température moyenne avait lieu.

Si l'on suppose que deux thermomètres soient placés en deux points très-voisins d'une même verticale, et que le premier soit immédiatement au-dessous de la surface, la marche comparée de ces instrumens fera connaître les effets respectifs de la chaleur extérieure et de la chaleur terrestre. Lorsque le thermomètre supérieur marquera une température plus élevée que celle du second, il s'ensuivra que la chaleur communiquée par les rayons solaires, ou d'autres causes extérieures, pénètre alors dans le globe et l'échauffe; mais, lorsque le thermomètre inférieur deviendra le plus élevé, on en conclura que la chaleur excédante que la terre avait acquise, commence à se dissiper dans l'atmosphère. La terre acquiert ainsi une chaleur nouvelle pendant une partie de l'année; elle la perd ensuite entièrement pendant l'autre partie de la même année. Cette période se trouve par-là

divisée en deux saisons contraires. La question consiste à exprimer exactement la quantité de la chaleur qui, traversant une surface d'une étendue donnée (un mètre carré), pénètre l'intérieur du globe, pendant la durée de l'échauffement annuel. Pour mesurer cette quantité de chaleur, on déterminera combien elle pourrait fondre de kilogrammes de glace.

Dans le cas que nous examinons, le mouvement périodique de la chaleur est exprimé par l'équation suivante :

$$w = v - \frac{1}{\theta} \int \varphi t. dt$$

$$= e^{-gu} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \left(2g^2 kt - gu + \text{arc tang } \frac{a}{b} \right).$$

Selon les principes que nous avons démontrés dans le cours de cet ouvrage, la quantité de chaleur qui, pendant un instant infiniment petit dt , passe d'un point de la verticale à un point inférieur, dans un filet solide dont la section est ω , a pour expression $-K \frac{dv}{du} \omega dt$: K représente la conducibilité intérieure (voir le lemme I.^{er}, art. 4). Prenant la valeur de $\frac{dv}{du}$, on aura l'équation

$$-\frac{dv}{du} = e^{-gu} \cdot g \sqrt{2(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} \sin \left[2g^2 kt - gu - \text{arc tang } \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \right].$$

L'échauffement annuel commence donc lorsqu'à la surface de la terre la quantité qui est sous le signe du sinus, étant nulle, commence à devenir négative. Il dure six mois, et le refroidissement a lieu pendant l'autre moitié de l'année. La vitesse avec laquelle la chaleur pénètre dans l'intérieur, est proportionnelle à la valeur de $-\frac{dv}{du}$. Ce flux de chaleur, à la surface où la quantité u est nulle, est représenté par

$$g \sqrt{2} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \left[2 g^2 k t - \arctan \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \right].$$

Il faut maintenant, pour déterminer la quantité acquise pendant la durée de l'échauffement, multiplier l'expression précédente par dt , et intégrer depuis la valeur de t qui rend nulle la quantité $2 g^2 k t - \arctan \left(\frac{a+b}{a-b} \right)$, jusqu'à la valeur de t qui rend cette même quantité égale à π .

Si l'on prend entre ces limites l'intégrale $-\int \frac{dv}{du} dt$, on aura $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{gk}$. On voit, par l'expression générale de la valeur de w , que $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ représente le *maximum* de la différence entre la température variable et la température moyenne. Soit A cette plus grande variation, dont la valeur est donnée par l'observation, et M la quantité totale de chaleur qu'il s'agissait de déterminer. Il faudra multiplier l'expression précédente $\frac{A \sqrt{2}}{gk}$ par le nombre K qui mesure la conductibilité intérieure, et par l'étendue de la surface, qui est ici un mètre carré. En remarquant que l'on a désigné par k la quantité $\frac{K}{CD}$, et que $g = \sqrt{\frac{\pi CD}{K \theta}}$, on aura le résultat suivant : $M = A \sqrt{\frac{2 K \cdot \theta \cdot CD}{\pi}}$.

La valeur de w , prise à la surface, est

$$(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \left[2 g^2 k t + \arctan \frac{a}{b} \right]; \text{ et celle de } -\frac{dv}{du}$$

$$\text{est } g \sqrt{2} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \left[2 g^2 k t - \arctan \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \right].$$

Si l'on suppose que le temps t commence lorsque w est nul,

c'est-à-dire lorsque la température a sa valeur moyenne, le terme arc tang $\frac{a}{b}$ s'évanouit : ainsi la quantité a est nulle.

On aura donc

$$w = b \sin 2 g^2 k t, \text{ et } -\frac{dv}{du} = g b \sqrt{2} \sin \left(2 g^2 k t + \frac{1}{4} \pi \right);$$

donc $\frac{dv}{du}$ commence à devenir positive lorsque $2 g^2 k t + \frac{1}{4} \pi = 0$; ce qui donne, en mettant pour g sa valeur, $t = -\frac{1}{8} \theta$.

Il suit de là que l'échauffement commence un huitième d'année après que la température de la surface est parvenue à la valeur moyenne : jusqu'à ce terme, l'intérieur de la terre étant plus échauffé que la surface, fait passer une partie de sa chaleur dans l'atmosphère; mais ensuite le mouvement de la chaleur se fait en sens contraire, parce que la surface est devenue plus chaude que les couches inférieures. La saison du refroidissement commence donc un huitième d'année après que la température décroissante de la surface est parvenue à sa valeur moyenne, et cette saison dure une demi-année. Si l'on voulait appliquer ces résultats au climat de Paris, on pourrait supposer $A = 8^d$ (division octogésim.). A l'égard des constantes K, C, D , si l'on choisit celles qui conviennent à une masse solide de fer, on aura pour valeurs approchées

$$K = \frac{3}{2}, C = \frac{5}{24}, D = 7800.$$

Faisant ensuite $\theta = 60.24.365$, on trouvera

$$M = A \sqrt{\frac{2 K C D \theta}{\pi}} = 2856.$$

On voit, par cet exemple de calcul, que la théorie fournit le moyen de déterminer exactement la quantité totale de

chaleur qui passe dans le cours d'une demi-année de l'atmosphère à l'intérieur de la terre, en traversant une surface d'une étendue donnée (un mètre carré). Cette quantité de chaleur équivaut, dans le cas que nous venons d'examiner, à celle qui peut fondre environ 2856 kilogrammes de glace, ou une colonne de glace d'un mètre carré de base sur 3^m,1 de hauteur.

87. Il nous reste maintenant à considérer le mouvement constant de la chaleur dans l'intérieur du globe. On a vu que les perturbations périodiques qui se manifestent à la surface, n'affectent point sensiblement les points situés à une certaine distance au-dessous de cette surface. Il faut donc faire abstraction de l'enveloppe extérieure du solide, dans laquelle s'accomplissent les oscillations sensibles de la chaleur, et dont l'épaisseur est extrêmement petite par rapport au rayon de la terre. L'état du solide intérieur est très-différent de celui de cette enveloppe. Chaque point conservant une température fixe, la chaleur s'y propage d'un mouvement uniforme, et passe avec une extrême lenteur des parties plus échauffées dans celles qui le sont moins : elle pénètre à chaque instant et de plus en plus dans l'intérieur du globe pour remplacer la chaleur qui se détourne vers les régions polaires. On n'entreprendra point ici de traiter cette question dans toute son étendue, parce qu'elle nous paraît seulement analytique, et qu'elle n'a point d'ailleurs une connexion nécessaire avec les fondemens de la théorie : mais il convenait à l'objet de cet ouvrage de montrer que toutes les questions de ce genre peuvent maintenant être soumises à l'analyse mathématique.

On suppose que tous les points de la circonférence d'un grand cercle tracé sur la surface d'une sphère solide ont acquis et conservent une température commune; que tous les points de la circonférence d'un cercle quelconque tracé

sur la surface parallèlement au premier, ont aussi une température permanente et commune, différente de celle des points de l'équateur, et que la température fixe décroît ainsi depuis l'équateur jusqu'au pôle suivant une loi déterminée. La surface étant maintenue, durant un temps infini et par des causes extérieures quelconques, dans l'état que nous venons de décrire, il est nécessaire que le solide parvienne aussi à un dernier état, et alors la température d'un point intérieur quelconque n'éprouvera aucun changement. Il est manifeste que si par le centre d'un parallèle on décrit une circonférence d'un rayon quelconque, tous les points de cette circonférence auront la même température.

Cela posé, l'on va démontrer que l'équation suivante,

$$v = \cos x \int e^{y \cos r} dr,$$

représente un état particulier du solide qui subsisterait de lui-même s'il était formé. x désigne la distance d'un point du solide au plan de l'équateur, et y sa distance à l'axe perpendiculaire à l'équateur; v est la température permanente du même point; l'indéterminée r disparaît après l'intégration, qui doit être prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \pi$. L'équation $v = \cos x \int e^{y \cos r} dr$ satisfait à la question, en ce que, si chaque point du solide recevait la température indiquée par cette équation, et que tous les points de la surface fussent entretenus par un foyer extérieur à cette température initiale, il n'y aurait dans l'intérieur de la sphère aucun changement de température. Pour vérifier cette solution, on établira, 1.° que l'équation $v = \cos x \int e^{y \cos r} dr$ satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dv}{dy} = 0;$$

2.° que l'état du solide est permanent lorsque cette dernière équation est satisfaite, et lorsque les points de la surface sont entretenus à leur température initiale.

En désignant par u la fonction de y , qui équivaut à l'intégrale définie $\int e^{y \cos r} dr$, on aura $v = u \cos x$; et substituant, on a $-u + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{du}{dy} = 0$, équation différentielle du second ordre à laquelle la valeur de u satisfait. Pour s'en assurer, on donnera à l'intégrale définie $\int e^{y \cos r} dr$ la forme exprimée par l'équation suivante,

$$\int e^{y \cos r} dr = \pi \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} + \frac{y^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} + \dots \right),$$

qu'il est facile de vérifier. Cette expression de la somme de la série

$$1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

est une conséquence évidente de la proposition générale énoncée dans l'article 53, et qui donne le développement de l'intégrale $\int du \varphi(t \sin u)$, φ étant une fonction quelconque. Or l'équation

$$u = \pi \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \right)$$

satisfait évidemment à l'équation différentielle

$$u = \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{du}{dy} :$$

donc la valeur particulière donnée par l'équation $v = \int e^{y \cos r} dr$ satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dv}{dy} = 0.$$

Cette dernière équation exprime la condition nécessaire pour que chaque point du solide conserve sa température. En effet, imaginons que, l'axe étant divisé en une infinité de parties égales dx , on élève dans le plan d'un méridien toutes

les coordonnées perpendiculaires à cet axe et qui passent par les points de division ; et pareillement, que, le diamètre de l'équateur, dans le plan du même méridien, étant divisé en un nombre infini de parties égales dy , on élève, par tous les points de division, des perpendiculaires qui coupent les précédentes. On aura divisé ainsi l'aire du méridien en rectangles infiniment petits ; et si le plan de ce méridien tourne sur l'axe, le solide sera divisé lui-même en une infinité d'éléments dont la figure est celle d'une armille.

Chacun de ces éléments est placé entre deux autres dans le sens des x , et entre deux autres dans le sens des y . La quantité de chaleur qui passe d'un élément à celui qui est placé après lui dans le sens des x , est égale à

$$-k \frac{dv}{dx} 2 \pi y dy.$$

Ce second élément transmet donc à celui qui le suit dans le sens des x , une quantité de chaleur exprimée par

$$-k \frac{dv}{dx} 2 \pi y dy - d \left[k \frac{dv}{dx} 2 \pi y dy \right],$$

d indiquant la différenciation par rapport à x . Donc l'élément intermédiaire acquiert, à raison de sa place dans le sens des x , une quantité de chaleur égale à $d \left(k \frac{dv}{dx} 2 \pi y dy \right)$. On voit de la même manière qu'un élément transmet à celui qui est placé après lui dans le sens des y , une quantité de chaleur exprimée par $-k \frac{dv}{dy} 2 \pi y dx$; que ce second élément communique à celui qui le suit dans le même sens, une quantité de chaleur égale à

$$-k \frac{dv}{dy} 2 \pi y dx - \delta \left(k \frac{dv}{dy} 2 \pi y dx \right),$$

δ étant ici le signe de la différenciation par rapport à y . Donc

l'élément intermédiaire acquiert, à raison de sa place dans le sens des y , une quantité de chaleur égale à

$$\delta \left(k \frac{dv}{dy} 2 \pi y dx \right).$$

Il suit de là que la température de chaque point du solide sera invariable si l'on a l'équation

$$d \left(\frac{dv}{dx} y dy \right) + \delta \left(\frac{dv}{dy} y dx \right) = 0,$$

ou
$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dv}{dy} = 0,$$

et si en même temps tous les points de la surface sont exposés à une action extérieure qui les oblige de conserver leurs températures initiales. On pourrait aussi déduire cette équation de l'équation générale (E), art. 15.

88. Il est nécessaire de remarquer que l'équation $v = \cos x \int e^{y \cos r} dr$ n'exprime qu'un état particulier et possible; il y a une infinité de solutions pareilles, et cette dernière n'aurait lieu qu'autant que la température fixe diminuerait à la surface, depuis l'équateur jusqu'au pôle, suivant une loi conforme à cette même équation

$v = \cos x \int e^{y \cos r} dr$. On pourrait aussi choisir l'équation

$$v = a \cos n x \int e^{n y \cos r} dr,$$

ou
$$v = a \cos n x \left(1 + \frac{n^2 y^2}{2^2} + \frac{n^4 y^4}{2^2 4^2} + \frac{n^6 y^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \right),$$

dans laquelle a est une constante indéterminée, et n un nombre arbitraire; et l'on voit que la somme de plusieurs de ces valeurs particulières satisfait encore à l'équation aux différences partielles. Mais on n'a en vue dans cet article

que de faire distinguer, par l'examen d'un cas particulier ; comment la chaleur se propage dans la sphère solide dont la surface est inégalement échauffée. C'est ce qu'on peut facilement reconnaître par l'analyse précédente.

Dans l'état particulier que nous considérons, qui est exprimé par l'équation $v = \cos x \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} \right)$, le rayon de la sphère étant pris pour l'unité, il est facile de voir que la température des points de la surface décroît depuis l'équateur jusqu'au pôle ; que si, par un point quelconque du plan de l'équateur, on élève une perpendiculaire jusqu'à la surface de la sphère, la température décroît comme le cosinus de la distance perpendiculaire à l'équateur, et que pour un parallèle quelconque la température augmente dans le plan de ce parallèle suivant le rayon, depuis le centre jusqu'à la surface. Ainsi la température du centre de la sphère est plus grande que celle du pôle et moindre que celle de l'équateur, et le point le moins échauffé de la sphère est celui qui est placé au pôle.

Pour connaître les directions suivant lesquelles la chaleur se propage, il faut imaginer que le solide est divisé, comme précédemment, en une infinité d'anneaux dont tous les centres sont placés sur l'axe de la sphère. Tous les éléments qui, ayant un même rayon y , ne diffèrent que par leur distance x à l'équateur, sont inégalement échauffés, et leur température décroît en s'éloignant de l'équateur. Un de ces éléments communique donc une certaine quantité de chaleur à celui qui est placé après lui, et ce second en communique aussi à l'élément suivant. Mais l'anneau intermédiaire donne à celui qui le suit plus de chaleur qu'il n'en reçoit de celui qui le précède ; résultat qui est indiqué par le facteur $\cos x$, dont la différentielle seconde est négative. Les éléments du solide qui sont placés à la même

distance x de l'équateur et diffèrent par la grandeur du rayon y , sont aussi inégalement échauffés, et leur température va en augmentant à mesure qu'on s'éloigne de la surface. Chacun de ces anneaux concentriques échauffe celui qu'il renferme : mais il transmet à l'anneau qui est au-dessous moins de chaleur qu'il n'en reçoit de l'anneau supérieur; ce qui se conclut du facteur $1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \dots$, dont la différentielle seconde est positive.

Il résulte de cette distribution de la chaleur, qu'un élément quelconque du solide transmet au suivant, dans le sens perpendiculaire à l'équateur, plus de chaleur qu'il n'en reçoit dans le même sens de celui qui le précède, et que ce même élément donne à celui qui est placé au-dessous de lui, dans le sens du rayon perpendiculaire à l'axe de la sphère, une quantité de chaleur moindre que celle qu'il reçoit en même temps et dans le même sens de l'anneau supérieur. Ces deux effets opposés se compensent exactement, et il arrive que chaque élément perd dans le sens parallèle à l'axe toute la chaleur qu'il acquiert dans le sens perpendiculaire à l'axe, en sorte que sa température ne varie point. On reconnaît distinctement, d'après cela, la route que suit la chaleur dans l'intérieur de la sphère. Elle pénètre par les parties de la surface voisines de l'équateur, et se dissipe par les régions polaires. Chacun des éléments infiniment petits placés dans l'intérieur du solide échauffe celui qui est placé au-dessous de lui et plus près de l'axe, et il échauffe aussi celui qui est placé à côté de lui plus loin de l'équateur. Ainsi la chaleur émanée du foyer extérieur se propage dans ces deux sens à-la-fois; une partie se détourne du côté des pôles, et une autre partie s'avance plus près du centre de la sphère. C'est de cette manière qu'elle se transmet dans toute la masse, et que chacun des

points, recevant autant qu'il perd, conserve sa température.

Le mouvement uniforme qu'on vient de considérer est extrêmement lent, si on le compare à celui qui s'accomplit dans l'enveloppe extérieure du globe. Le premier résulte de la différence des températures de deux parallèles voisins, et le second, de la différence des températures entre deux points voisins de la surface et placés dans une même verticale. Or cette différence prise entre deux points dont la distance est donnée, est incomparablement plus grande dans le sens vertical que dans le sens horizontal.

Indépendamment des changemens de température que la présence du soleil reproduit chaque jour et dans le cours de chaque année, toutes les autres inégalités qui affectent le mouvement apparent de cet astre, occasionnent aussi des variations semblables. C'est par-là que cette quantité immense de chaleur qui pénètre la masse du globe est assujettie dans tous ses mouvemens aux lois générales qui régissent l'univers. Toutes les causes qui font varier l'excentricité et les élémens de l'ellipse solaire, produisent autant d'inégalités correspondantes dans l'ordre des températures; cet ordre s'altère insensiblement, et se rétablit ensuite dans le cours de ces mêmes périodes qui conviennent aux diverses inégalités.

Le mouvement elliptique qui rend les saisons inégales, n'empêche point que la chaleur qui émane du soleil dans le cours de chaque année ne se distribue également entre les deux hémisphères; mais cette différence dans la durée des saisons influe sur la nature de la fonction périodique qui règle les températures de chaque climat. Il suit de là que le déplacement du grand axe de l'orbe solaire transporte alternativement d'un hémisphère à l'autre ces mêmes variations de température. Au reste, les différences dont il s'agit sont très-peu sensibles, et le progrès en est extrêmement lent. On

doit sur-tout les distinguer de celles qui résultent des causes locales, telles que la configuration du sol, son élévation dans l'atmosphère, la nature solide ou liquide de la surface qui reçoit la chaleur. C'est aux circonstances propres à chaque région qu'il faut attribuer les différences notables qu'on observe entre les températures moyennes des climats pareillement situés dans les deux hémisphères. Les effets des causes locales diffèrent de ceux dont on a parlé, en ce qu'ils ne sont point périodiques, et qu'ils affectent sensiblement la valeur de la température moyenne annuelle.

XIII.

Des Lois mathématiques de l'Équilibre de la Chaleur rayonnante.

89. Si l'on place divers corps, $M, N, P, \dots$ dans un espace vide d'air, que termine de toutes parts une enceinte solide entretenue par des causes extérieures quelconques à une température constante 1 , tous ces corps, quoique distans les uns des autres, prendront une température commune; et cette température finale, dont celle de chaque molécule s'approche de plus en plus, est la même que celle de l'enceinte. Ce résultat ne dépend ni de l'espèce ni de la forme des corps, ni du lieu où ils sont placés; quelles que soient ces circonstances, la température finale sera toujours commune et égale à celle de l'enceinte. Le fait général qu'on vient d'énoncer donne lieu à différentes questions que nous allons traiter dans cet article, en exposant la théorie de la chaleur rayonnante.

Il est certain que l'équilibre de température entre les corps distans s'établit par l'irradiation de la chaleur, en sorte que chaque portion infiniment petite de la surface des

corps est le centre d'un hémisphère composé d'une infinité de rayons. Il se présente d'abord la question de savoir si tous ces rayons ont une égale intensité, ou si leur intensité varie en même temps que l'angle qu'ils font avec la surface dont ils s'éloignent. En général, si deux surfaces infiniment petites s et σ sont inégalement échauffées, et présentées l'une à l'autre, la plus froide acquerra en vertu de leur action mutuelle une nouvelle quantité de chaleur, qui dépend de la distance y des deux surfaces, de l'angle p que fait avec s la ligne y , de l'angle φ que fait avec σ la même ligne y , de l'étendue infiniment petite s et σ de ces deux surfaces, enfin de leurs températures a et b . Nous démontrerons que le résultat de l'action mutuelle de s et σ est exprimé par $\frac{g s \sin p (a - b) \sigma \sin \varphi}{y^2}$. g est un coefficient

constant qui mesure la conducibilité extérieure des deux surfaces. Ensuite nous ferons voir que ce théorème suffit pour expliquer distinctement comment s'établit et subsiste, dans tous les cas, l'égalité de température qu'on observe entre divers corps placés dans une même enceinte.

On ignore entièrement aujourd'hui la nature de cette force intérieure dont résulte l'émission de la chaleur, et la cause qui produit les réflexions à la surface. Parmi les physiciens qui ont traité de la chaleur, les uns la considèrent comme une matière propre qui traverse les milieux élastiques et les espaces vides; d'autres font consister sa propagation dans les vibrations d'un fluide extrêmement subtil. Quoi qu'il en soit, il est naturel de comparer les rayons de la chaleur à ceux de la lumière, et de supposer que les corps se transmettent mutuellement la chaleur dont ils sont pénétrés, de même que deux surfaces qui sont inégalement ou également éclairées s'envoient réciproquement leur lumière. C'est dans cet échange de rayons que consiste principalement l'hypo-

thèse proposée par M. le professeur Prevost, de Genève. Cette hypothèse fournit des explications claires de tous les phénomènes connus; elle se prête plus facilement qu'aucune autre aux applications du calcul: il nous paraît donc utile de la choisir, et l'on peut même l'employer avec avantage pour se représenter le mode de la propagation de la chaleur dans les corps solides. Mais, si l'on examine attentivement les lois mathématiques que suivent les effets de la chaleur, on voit que la certitude de ces lois ne repose sur aucune hypothèse physique. Quelque idée qu'on puisse se former de la cause qui lie tous les faits entre eux, et dans quelque ordre qu'on veuille disposer ces faits, pourvu que le système qu'on adopte les comprenne tous, on en déduira toujours les lois mathématiques auxquelles ils sont assujettis. Ainsi l'on ne peut point affirmer que les deux surfaces infiniment petites s et σ s'envoient toutes les deux des rayons de chaleur, quelles que soient leurs températures; on pourrait supposer indifféremment que celle dont la température est la plus élevée est la seule qui transmette à l'autre une partie de sa chaleur: mais, soit qu'on préfère l'une ou l'autre supposition, on ne peut douter que l'effet résultant de l'action des deux surfaces ne soit proportionnel à la différence des températures, aux sinus des angles d'émission et d'incidence, à l'étendue des surfaces, et réciproquement proportionnel au carré de la distance. En effet, il nous sera facile de prouver que, si ces conditions n'étaient point remplies, l'équilibre des températures ne pourrait pas subsister.

On exprime par le coefficient h la quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps, sort de l'unité de surface échauffée à la température 1 , et s'échappe dans l'espace vide d'air. Pour faciliter l'application du calcul, on attribue à cet espace infini une température fondamentale désignée par 0 , et l'on conçoit qu'une masse dont la température est a

envoie d'elle-même dans cet espace, quelles que soient d'ailleurs les températures de tous les corps environnans, une quantité de chaleur proportionnelle à la température a , et exprimée par $a s h$. s est l'étendue de la surface extérieure, et h le coefficient qui mesure la conducibilité.

90. Chaque partie infiniment petite ω d'une surface échauffée est le centre d'un hémisphère continuellement rempli par la chaleur rayonnante; et si l'on pouvait recevoir toute la quantité que cette particule envoie à l'espace environnant pendant l'unité de temps, cette chaleur totale serait exprimée par $a \omega h$. L'intensité des rayons émis peut n'être pas la même dans tout l'hémisphère, et dépendre d'une manière quelconque de l'angle φ que la direction du rayon fait avec la surface. Pour mesurer l'intensité d'un rayon donné, on supposera que tous les autres qui remplissent en même temps l'hémisphère, contiennent autant de chaleur que lui. Dans cette supposition, la quantité totale envoyée par l'unité de surface pendant l'unité de temps ne sera plus h . On désignera par G cette chaleur totale, et l'on prendra G pour la mesure de l'intensité du rayon dont il s'agit. G est une fonction inconnue du sinus de φ . On aura généralement $G = a g F(\sin \varphi)$, la température étant désignée par a . Si dans la surface hémisphérique dont le centre est un point de la surface échauffée, on trace une zone qui ait pour hauteur l'arc $d\varphi$ (le rayon étant 1), on aura $2\pi \cos \varphi d\varphi$ pour la surface de cette zone. Il est facile d'exprimer la quantité totale de chaleur qui pendant une minute traverse cette zone. En effet, si tous les rayons qui traversent la surface hémisphérique 2π avaient la même intensité que ceux qui passent par la zone $2\pi \cos \varphi d\varphi$, le produit de l'émission pendant l'unité de temps serait, par hypothèse, G ou $a g F(\sin \varphi)$: donc la chaleur totale qui dans le même

temps passe par la zone, est moindre que G dans le rapport des deux surfaces $2 \pi \cos \varphi d\varphi$ et 2π . Cette chaleur

totale est $\frac{2 G \pi \cos \varphi d\varphi}{2 \pi}$ ou $a g F(\sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$. En inté-

grant cette différentielle depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2} \pi$,

on doit avoir la quantité $a h$: on trouve donc en premier lieu la condition suivante, $h = g \int d\varphi \cos \varphi F(\sin \varphi)$. Par exemple, si l'intensité était indépendante de l'angle d'émission et la même pour tous les rayons, on aurait $F \sin \varphi = 1$, et, en intégrant, $h = g$.

Si l'intensité est proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, ce qui est le cas de la nature, comme on le verra bientôt, on aura $F(\sin \varphi) = \sin \varphi$, d'où l'on conclut

$h = \frac{1}{2} g$. L'équation $h = g \int d\varphi \cos \varphi F(\sin \varphi)$ exprime

que h est l'intensité moyenne de tous les rayons émis. Lorsque l'intensité varie comme le sinus, elle est exprimée par $g \sin \varphi$ ou $2 h \sin \varphi$: ainsi les rayons émis sous un angle

égal à $\frac{1}{3}$ de droit ont une intensité égale à la valeur moyenne;

et si tous les rayons étaient semblables à ceux qui sortent perpendiculairement de la surface, le produit de l'émission serait double de ce qu'il est en effet.

91. Ces principes étant établis, nous résoudrons successivement plusieurs questions particulières; et la comparaison des résultats fera connaître, sans aucun doute, la loi du décroissement de l'intensité des rayons.

1.° On suppose que deux surfaces planes parallèles et infinies soient entretenues à une température constante, et qu'ensuite on introduise dans l'espace vide d'air compris

entre ces deux plans un disque infiniment petit, dont la base soit située parallèlement aux deux surfaces (*fig. 1*); il s'agit de déterminer la température finale que ces plans échauffés communiquent au disque. a désigne la température constante des plans, μ est le rayon infiniment petit de la base du disque, dont l'épaisseur est elle-même infiniment petite par rapport à μ . La conducibilité h des deux surfaces échauffées est supposée la même que celle du disque. On fait abstraction de la propriété que toutes ces surfaces pourraient avoir de réfléchir une partie de la chaleur incidente, c'est-à-dire qu'on suppose qu'aucun rayon de chaleur envoyé au disque ne peut être réfléchi. On verra par la suite que la propriété dont il s'agit, à quelque degré que les corps en jouissent, n'apporte aucun changement à l'équilibre de la chaleur rayonnante. f est la distance connue du centre du disque à l'un des plans; r désigne la distance variable du disque à un point m du plan; x , la distance de m au point fixe o ; et φ , l'angle entre r et x . G ou $g F (\sin \varphi)$ désigne, comme précédemment, l'intensité du rayon émis sous l'angle φ à la température a , et l'on a l'équation de condition $h = g \int d\varphi \cos \varphi F (\sin \varphi)$, l'intégrale étant prise de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{1}{2} \pi$. Cela posé, le point m envoie au disque infiniment petit un rayon de chaleur qui, traversant la surface sphérique dont le rayon est r , occupe une surface égale à $\pi \mu^2 \sin \varphi$. En effet, la forme de ce rayon étant celle d'un cône dont les côtés font un angle infiniment petit, le rapport de la surface de la base à celle de la section perpendiculaire est celui du rayon au sinus de l'angle φ . Désignons par ω la portion infiniment petite du plan qui envoie la chaleur de m en μ sous l'angle φ . Si tous les rayons qui traversent la surface hémisphérique $2 \pi r$ avaient la même intensité que le rayon dont il s'agit, le produit de

l'émission serait ωG : donc la quantité totale de chaleur

qui, partant de ω , tombe sur le disque, est $\frac{\omega G \pi \mu^2 \sin \varphi}{2 \pi r^2}$.

Or tous les points de la couronne circulaire $2 \pi x dx$, qui a son centre au point o et pour hauteur dx , envoient leurs rayons au disque sous l'angle φ . On remplacera donc ω par $2 \pi x dx$; ensuite on mettra au lieu de G sa valeur $ag F(\sin \varphi)$.

On a donc la différentielle $\frac{2 \pi x dx \cdot ag (F \sin \varphi) \cdot \mu^2 \sin \varphi}{2 r^2}$. Si l'on

met au lieu de x et de r leurs valeurs $f \cotang. \varphi$ et $f \coséc. \varphi$, la différentielle précédente deviendra $-ag \pi \mu^2 f d\varphi \cos \varphi F(\sin \varphi)$; ou faisant $\sin \varphi = z$, $-ag \pi \mu^2 dz Fz$. Si l'on veut connaître l'action exercée sur le disque par un plan circulaire dont le rayon est X , on désignera par Z la dernière valeur du sinus de φ , et l'on prendra l'intégrale précédente depuis $z = 1$ jusqu'à $z = Z$, ou, ce qui est la même chose, on prendra l'intégrale $ag \pi \mu^2 f dz Fz$ de $z = Z$ à $z = 1$.

De plus, on aura $g = \frac{h}{f dz Fz}$, l'intégrale étant prise de $z = 0$ à $z = 1$. Donc la quantité totale de chaleur que le disque reçoit du plan circulaire est $ah \pi \mu^2 \frac{\int_1 dz Fz}{\int_0 dz Fz}$: la première intégrale est prise depuis $z = Z$ jusqu'à $z = 1$, et la seconde, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$.

Si l'intensité des rayons est indépendante de l'angle d'émission, la quantité de chaleur que le disque reçoit du plan circulaire est $ah \pi \mu^2 (1 - \sin \Phi)$, ou $ah \pi \mu^2 \sin \text{verse } \Psi$, en désignant par Φ la dernière valeur de la variable φ , et par Ψ la moitié de l'angle dont le sommet est au centre du disque et dont les côtés embrassent le plan.

Si l'intensité décroît comme le sinus de l'angle d'émission, on trouve $a \pi h \mu^2 \cos^2 \Phi$, ou $a \pi h \mu^2 \sin^2 \Psi$.

Si l'on éloigne de plus en plus le disque du plan échauffé,

toutes les autres conditions demeurant les mêmes, l'action du plan décroît dans le premier cas comme le sinus verse du demi-angle au centre, et dans le second, comme le carré du sinus du demi-angle au centre. Dans l'un et l'autre cas, si le plan est infini, la quantité de chaleur que le disque reçoit est $a h \pi \mu^2$, et ne dépend nullement de la distance f .

En général, quelle que soit la fonction $F(\sin \phi)$, l'expression $a h \pi \mu^2 \frac{\int_1 dz F(z)}{\int_2 dz F(z)}$ se réduit à $a h \pi \mu^2$ lorsque le plan circulaire est infini; car les termes de la première intégrale deviennent les mêmes que les termes de la seconde. Si donc on suppose que l'intensité des rayons varie suivant une fonction quelconque de l'angle d'émission, et si l'on place le disque parallèlement au plan infini à une distance quelconque, la quantité de chaleur envoyée au disque pendant l'unité de temps sera $a h \pi \mu^2$. Il en sera de même du plan infini supérieur au disque : donc la quantité totale de chaleur reçue par le disque sera $2 a h \pi \mu^2$.

Soit b la température finale que le disque doit acquérir. La surface totale étant $2 \pi \mu^2$, et la conducibilité h , il s'en échappera pendant l'unité de temps une quantité de chaleur égale à $2 b h \pi \mu^2$. Or, pour que la température acquise par le disque soit permanente, il faut qu'il reçoive autant de chaleur qu'il en perd; on a donc $2 b h \pi \mu^2 = 2 a h \pi \mu^2$, et $b = a$.

Il suit de là que le disque infiniment petit placé parallèlement aux deux plans en un point quelconque de l'espace qu'ils comprennent, parviendra toujours à une température finale égale à celle des deux plans. Ce résultat ne dépend point de la loi suivant laquelle l'intensité des rayons peut décroître à mesure qu'ils deviennent plus obliques.

92. On place une molécule sphérique infiniment petite au centre d'un espace terminé par une surface sphérique qu'on entretient à la température constante a . Il s'agit de déterminer la température finale de la molécule. La conducibilité des surfaces est désignée par h ; ρ est le rayon de la molécule; on exprime par G ou $a g \sin \phi$ l'intensité du rayon émis sous l'angle ϕ ; et l'on a, comme précédemment,

$$h = g \int d\phi \cos \phi F(\sin \phi).$$

Une portion infiniment petite ω de la surface intérieure de la sphère envoie des rayons de chaleur qui remplissent continuellement l'hémisphère dont le rayon est r . Le rayon qui, parti de ω , tombe sur la molécule, occupe sur la surface hémisphérique égale à $2 \pi r^2$ une portion égale à $\pi \rho^2$. Si tous les rayons sortis de ω avaient l'intensité G , la quantité totale de chaleur envoyée par ω pendant l'unité de temps serait ωG . Donc le rayon qui tombe sur la molécule fournit pendant ce même temps une quantité de chaleur égale à $\omega G \frac{\pi \rho^2}{2 \pi r^2}$. On a aussi, $\sin \phi$ étant 1,

$$G = a g F(1) = \frac{a h F(1)}{\int d\phi \cos \phi F(\sin \phi)}. \text{ Donc la chaleur que la portion } \omega \text{ donne à la molécule est } \omega a h \frac{F(1)}{\int d\phi \cos \phi F(\sin \phi)} \cdot \frac{\pi \rho^2}{2 r^2}.$$

Le rapport de la surface sphérique à ω étant $\frac{4 \pi r^2}{\omega}$, on aura pour l'expression de la chaleur totale reçue par la molécule, $2 \pi a h \rho^2 \cdot \frac{F(1)}{\int d\phi \cos \phi F(\sin \phi)}$; ou faisant

$\sin \phi = z$, $2 a \pi h \rho^2 \frac{F(1)}{\int dz F z}$, l'intégrale étant prise de $z = 0$ à $z = 1$. Soit b la température finale acquise par la molécule: elle dissiperait par sa surface une quantité de chaleur égale à $4 b \pi \rho^2 h$. Donc on aura l'équation

A a *

$$4 b \pi \rho^2 h = 2 a \pi h^2 \rho^2 \cdot \frac{F(1)}{\int dz Fz}, \text{ ou } b = \frac{1}{2} a \frac{F(1)}{\int dz Fz}.$$

Si l'intensité des rayons ne varie point, on a $F(z) = 1$ et $b = \frac{1}{2} a$. Il arriverait donc que la molécule placée au centre de la sphère prendrait une température finale égale à la moitié de celle de l'enceinte.

Si l'intensité des rayons décroît proportionnellement au sinus de l'obliquité, on a $F(z) = z$, et $b = a$. Dans ce cas, la molécule acquiert et conserve une température égale à celle de l'enceinte.

93. On propose maintenant de déterminer l'action d'un plan circulaire sur une molécule sphérique placée dans l'axe du plan.

On désigne, comme ci-dessus, par x, r, f, ϕ , les quantités relatives à la position de la molécule, et à celle du point qui lui envoie de la chaleur. h est la conducibilité de la surface, a la température du plan, G ou $ag F(\sin \phi)$ l'intensité du rayon émis par le plan sous l'angle ϕ .

On trouve facilement, pour l'expression de la quantité de chaleur envoyée à la molécule par la couronne dont la hauteur est dx , la différentielle suivante :

$$2 \pi x dx \cdot ag F(\sin \phi) \frac{\pi \rho^2}{2 \pi r^2},$$

$$\text{ou } \pi d(x^2) ag F(\sin \phi) \frac{\rho^2}{2 r^2}.$$

Mettant pour x et r leurs valeurs $f \cot. \phi$ et $f \operatorname{cosec}. \phi$, on aura la différentielle $— a \pi \rho^2 g F(\sin \phi) \cdot \frac{\cos \phi d\phi}{\sin \phi}$; ou faisant $\sin \phi = z$, $— a \pi \rho^2 g \cdot \frac{dz Fz}{z}$. Mettant pour g sa valeur $\frac{h}{\int dz Fz}$, l'intégrale étant prise de $z = 0$ à $z = 1$,

on aura pour l'expression de la chaleur totale reçue par la

molécule, $-a \pi \rho^2 h \frac{\int_1 \frac{dz}{z} F z}{\int_2 dz F z}$; l'intégrale au numérateur doit être prise de $z = 1$ à $z = Z$, dernière valeur de z , et la seconde, de $z = 0$ à $z = 1$. On peut donc remplacer cette

expression par celle-ci : $a \pi \rho^2 h \frac{\int_1 \frac{dz F z}{z}}{\int_2 dz F z}$; la première intégrale doit être prise de $z = Z$ à $z = 1$, et la seconde, de $z = 0$ à $z = 1$.

Si l'intensité des rayons émis est la même pour toutes les obliquités, on a $F z = 1$, et la quantité de chaleur reçue par la molécule est $a \pi \rho^2 h \log. \left(\frac{1}{\sin \Phi} \right)$, en désignant par Φ la dernière valeur de ϕ . L'action du disque sur la molécule est donc toujours proportionnelle au logarithme de la sécante du demi-angle au centre. Si, en conservant la distance f , on faisait varier le rayon du disque, et que les distances extrêmes $R, R', R'', \dots$ augmentassent comme les nombres 1, 2, 4, 8, 16, ... les quantités de chaleur reçues augmenteraient comme les nombres naturels. On pourrait donc rendre ces quantités aussi grandes qu'on le voudrait.

Il suit de là que si tous les rayons qui s'échappent d'un point d'une surface échauffée avaient une égale intensité, on pourrait, au moyen d'un plan circulaire entretenu à la température constante a , communiquer à la molécule sphérique une température b supérieure à a , et aussi grande qu'on voudrait. En effet, la molécule laisserait échapper par sa surface une quantité de chaleur égale à $4 b h \pi \rho^2$; écrivant donc $4 b h \pi \rho^2 = a \pi \rho^2 h \log. \left(\frac{1}{\sin \Phi} \right)$, on a $\sin \Phi = e^{-4 \cdot \frac{b}{a}}$. Ainsi l'on pourrait toujours déterminer

l'angle Φ en sorte que la température b reçût une valeur quelconque.

Il est facile de voir que ce résultat est entièrement contraire aux faits, et que, par conséquent, l'intensité des rayons émis n'est point la même pour tous les rayons.

Si dans l'expression $a \pi \rho^2 h \frac{\int_1 \frac{dz F z}{z}}{\int_2 dz F z}$ on suppose $F z = z$, c'est-à-dire, si l'intensité décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission, on trouvera après l'intégration $2 a \pi \rho^2 h (1 - \sin \Phi)$. Dans cette seconde hypothèse, l'action du disque est proportionnelle au sinus verse du demi-angle au centre : elle est toujours moindre que $2 a \pi \rho^2 h$.

Si le plan échauffé est infini, la chaleur qu'il donne à la molécule est $2 a \pi \rho^2 h$, quelle que soit d'ailleurs la distance f . En supposant au-dessus de la molécule un second plan infini, également entretenu à la température a , la quantité totale de chaleur reçue par la molécule sera $4 a \pi \rho^2 h$. Si la température acquise était b , cette même molécule perdrait $4 b \pi \rho^2 h$. Donc $b = a$, et par conséquent, si l'on place une molécule sphérique en un point quelconque de l'espace compris entre deux plans entretenus à une température constante, elle acquerra une température égale à celle des deux plans. Ce résultat doit avoir lieu si l'intensité des rayons varie comme le sinus de l'angle d'émission.

94. On déterminera encore l'action d'une surface cylindrique sur une molécule sphérique placée dans un point de son axe.

Le point m (fig. 2) envoie à la molécule un rayon de chaleur dont la longueur est r , et qui fait avec la surface dont il sort un angle ϕ . Il en est de même de tous les points qui sont placés

comme le point m dans une zone cylindrique dont le rayon est f et la hauteur dx . Il suit de là que la quantité de chaleur envoyée par la zone à la molécule dont le rayon est ρ , a pour expression $\frac{\pi \rho^2}{2\pi r^2} \cdot ag F(\sin \varphi) \cdot 2\pi f dx$. On mettra au lieu de x et r leurs valeurs $f \cotang. \varphi$ et $f \coséc. \varphi$: on trouvera alors $\frac{f dx}{r^2} = -d\varphi$. Donc la différentielle précédente deviendra $-ag\pi\rho^2 d\varphi F(\sin \varphi)$. Prenant donc l'intégrale depuis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi = \Phi$, ou prenant l'intégrale avec un signe contraire, depuis $\varphi = \Phi$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura la quantité de chaleur envoyée à la molécule par la partie de la surface cylindrique qui est située à la gauche. Cette quantité est $\frac{a\pi\rho^2 h \int d\varphi F(\sin \varphi)}{\int d\varphi \cos \varphi F(\sin \varphi)}$; l'intégrale du numérateur est prise de $\varphi = \Phi$ à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, et celle du dénominateur, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. On aura un résultat analogue pour la partie de la surface cylindrique qui est à la droite de la molécule. L'action totale de cette surface sera exprimée par la somme des deux termes.

Si $F(\sin \varphi) = 1$, l'action totale de la surface cylindrique sur la molécule sera $a\pi\rho^2 h(\Psi + \Psi')$, en désignant par Ψ et Ψ' (*fig. 3*) les angles que font avec la perpendiculaire les deux rayons qui, partant de la molécule, aboutissent aux extrémités du cylindre. Cette action est donc proportionnelle, toutes choses d'ailleurs égales, à l'angle au centre, c'est-à-dire, à celui qui a son sommet à la molécule, et dont les côtés comprennent la surface cylindrique. Si la longueur de cette surface est infinie, la quantité de chaleur reçue par la molécule est $a\pi\rho^2 h\pi$. La quantité qu'elle laisserait échapper si elle avait la tempé-

rature b serait $4 \pi \rho^2 h b$: on a donc $b = a \frac{\pi}{4}$. Donc la molécule placée en un point quelconque de l'axe d'une surface cylindrique échauffée, acquerrait une température moindre que celle de l'enceinte dans la raison des nombres π et 4, en supposant que l'intensité des rayons fût constante sous tous les angles d'émission.

Si cette intensité est proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, on aura $F(\sin \varphi) = \sin \varphi$, et l'on trouvera, pour exprimer l'action de la surface cylindrique, la quantité suivante, $a \pi \rho^2 h (2 \sin \Psi + 2 \sin \Psi')$. Les deux angles Ψ et Ψ' qui, dans le cas précédent, entrent dans la valeur de l'action totale, sont ici remplacés par leurs doubles sinus. Lorsque la longueur de la surface échauffée est infinie, la mesure de la quantité de chaleur reçue est $4 a \pi \rho^2 h$; et comme la molécule ayant la température b dissiperait une quantité de chaleur égale à $4 b \pi \rho^2 h$, il s'ensuit que $b = a$. Donc, si l'on place une molécule sphérique dans l'axe d'une surface cylindrique dont la température est fixe, la molécule acquerra la température de l'enceinte, en supposant que l'intensité des rayons émis décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission.

95. Nous déterminerons en dernier lieu quelle est, dans les deux hypothèses précédentes, la température que doit acquérir une molécule sphérique lorsqu'on la place dans l'axe d'une enveloppe cylindrique fermée à ses deux extrémités par des plans circulaires.

Il résulte des théorèmes précédens (art. 93 et 94) que si l'intensité des rayons varie proportionnellement au sinus de l'angle d'émission, l'action de l'enveloppe E (fig. 4) équivaut à $a \pi \rho^2 h (2 \sin \Psi + 2 \sin \Psi')$; que l'action du plan B est $a \pi \rho^2 h (2 - 2 \sin \Phi)$ ou $a \pi \rho^2 h (2 - 2 \sin \Psi)$, et que

celle du plan B' est $a \pi \rho^2 h (2 - 2 \sin \Psi')$. Donc l'action totale de l'enceinte est $4 a \pi \rho^2 h$; et, par conséquent, la molécule, étant placée en un point quelconque de l'axe, doit acquérir une température égale à celle que conserve l'enceinte. Ce résultat ne dépend ni des dimensions ni du rapport de la longueur du cylindre au diamètre de la base. Mais, si l'intensité était invariable quel que fût l'angle d'émission, l'action de l'enveloppe serait, comme on l'a vu précédemment, $a \pi \rho^2 h (\Psi + \Psi')$; celle du plan B serait $a \pi \rho^2 h \log. \left(\frac{1}{\sin \Psi} \right)$; celle du plan B' serait $a \pi \rho^2 h \log. \left(\frac{1}{\sin \Psi'} \right)$.

Donc l'action totale des surfaces serait

$$a \pi \rho^2 h (\Psi - \log. \sin \Psi + \Psi' - \log. \sin \Psi').$$

Désignant par b la température finale de la molécule, on aurait

$$b = \frac{1}{4} a (\Psi - \log. \sin \Psi + \Psi' - \log. \sin \Psi').$$

Cette température dépendrait donc de la position de la molécule et de la forme de l'enceinte; elle pourrait devenir, ou moindre que celle de l'enveloppe, ou infiniment plus grande, si l'on plaçait la molécule au centre, ou si on la rapprochait de l'une des bases. Or ce résultat est entièrement contraire aux observations communes: il est donc impossible de supposer que les rayons de chaleur qui sortent sous divers angles d'un même point de la surface des corps, ont une égale intensité.

96. Nous allons présentement démontrer qu'en supposant l'intensité décroissante et proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, il doit s'établir entre tous les corps placés dans un même lieu une température commune, indépendante de leur forme, de leur nombre et de leur situation. Soient deux surfaces

planes infiniment petites s et σ , placées à une distance finie ; c'est-à-dire que les dimensions des deux figures sont incomparablement plus petites que leur distance y . On suppose que l'une des surfaces est entretenue à la température finie a ; il s'agit de trouver combien la seconde σ en reçoit de chaleur dans un temps donné. On n'a point égard ici à la partie de cette chaleur qui pourrait être réfléchie par σ ; on veut connaître la quantité totale qui tombe sur cette surface. Soient p l'angle que la distance y fait avec s , et ϕ l'angle qu'elle fait avec σ . Il est évident qu'on peut prendre pour les termes de la distance y deux points quelconques des deux figures s et σ , et que l'on doit regarder comme nulles les variations que les changemens de ces points occasionneraient dans la longueur y et dans les angles p et ϕ . Chaque portion infiniment petite ω prise sur la surface échauffée est le centre d'un rayon de chaleur qui tombe sur σ . Il faut d'abord connaître combien ce rayon contient de chaleur. Si par un point de la surface σ on mène dans le rayon une section qui soit perpendiculaire à sa direction, il est facile de voir que l'étendue de cette section est $\sigma \sin \phi$. En effet, les lignes dont le rayon est formé faisant entre elles un angle infiniment petit, on considérera, selon les principes du calcul différentiel, la forme de ce rayon comme prismatique. Or, si l'on mène dans un prisme oblique une section perpendiculaire à l'arête, l'étendue de cette section est $\sigma \sin \phi$, en désignant par σ la surface de la base et par ϕ l'angle que fait l'arête avec la base. Pour rendre ce résultat évident, il faut, après avoir divisé le prisme oblique en deux parties au moyen de la section perpendiculaire, transposer ces deux parties, en sorte qu'elles forment un prisme droit ayant pour base les deux sections perpendiculaires : la hauteur du nouveau prisme devient alors égale à la longueur du prisme oblique ; donc le rapport des hauteurs respectives de ces deux solides est le rapport inverse de leurs

bases, c'est-à-dire que la surface de la section perpendiculaire équivaut à $\sigma \sin \Phi$. Au reste, cette proposition se conclut facilement de la comparaison des pyramides qui, ayant leur sommet en ω (fig. 5), ont pour base la surface inclinée mn , ou les trois surfaces mp , rt , qn , perpendiculaires à l'axe y ; il est évident que la dernière raison de ces solides est l'unité. Maintenant le rayon qui tombe sur la base $\sigma \sin \Phi$ appartient à un hémisphère dont la surface est $2\pi y^2$. La direction de ce rayon faisant avec le plan dont il sort un angle p , son intensité est $agF(\sin p)$; a est la température et g un coefficient constant. Donc la quantité de chaleur envoyée par la portion ω est $\omega agF(\sin p) \cdot \frac{\sigma \sin \Phi}{2\pi y^2}$. Si l'on multiplie cette quantité par le rapport de s à ω , on aura la quantité totale de chaleur que s envoie à σ : cette quantité est

$$\frac{ag}{2\pi} s \cdot F(\sin p) \sigma \sin \Phi.$$

Supposons maintenant que la surface σ soit aussi à la température a , il est visible qu'elle enverra à s une quantité de chaleur égale à $\frac{ag}{2\pi} \sigma \cdot F(\sin \Phi) s \cdot \sin p$.

On voit distinctement par ces deux résultats que si la fonction $F(\sin \Phi)$ est le sinus même, l'action de s sur σ sera égale à celle de σ sur s , et que, si cette fonction n'est pas proportionnelle au sinus, les deux actions ne seront point égales. Or il est facile de reconnaître que cette égalité des deux actions réciproques est précisément ce qui constitue l'équilibre des températures. Donc il est nécessaire que l'intensité des rayons qui s'échappent ensemble d'un point d'une surface, soit proportionnelle au sinus de l'angle d'émission.

On a vu précédemment (art. 90, page 182) que le coefficient g est donné par l'équation $h = g \int d\Phi \cos \Phi F(\sin \Phi)$, de sorte que l'on a ici $g = 2h$. Donc l'action de s sur σ est

Bb*

$\frac{s \cdot \sin p \cdot a \cdot h \cdot \sigma \cdot \sin \varphi}{\pi y^2}$. Si les deux surfaces ont des températures inégales a et b , le résultat de leur action mutuelle sera, comme nous l'avons annoncé, proportionnel à

$$\frac{s \sin p (a - b) h \sigma \cdot \sin \varphi}{y^2}.$$

97. Supposons maintenant qu'un espace vide d'air soit terminé de toutes parts, et que l'enceinte qui le renferme soit, par une cause extérieure quelconque, maintenue à une température fixe a : il faut déterminer l'état final auquel un corps parviendrait si on le plaçait dans un point de cet espace.

Il est visible que l'état dont il s'agit est celui que le corps conserverait sans aucun changement, si on le lui donnait d'abord, et si on le plaçait ensuite dans un point de l'espace échauffé. Or on peut s'assurer facilement que cela aurait lieu si chaque point du corps recevait d'abord la température a de l'enceinte. En effet, une partie infiniment petite quelconque σ de la surface de ce corps est exposée à l'action d'une infinité de petites surfaces $s, s', s'', s''' \dots$; elle envoie à chacune d'elles, d'après le théorème précédent, une quantité de chaleur exactement égale à celle qu'elle en reçoit. Donc cette partie σ de la surface du corps ne peut éprouver aucun changement de température. Le corps lui-même, dont tous les points intérieurs ont la température commune a , doit donc aussi conserver cette même température; donc il tendrait continuellement à l'acquiescer, si son état initial était différent.

Ces résultats sont entièrement indépendants de la forme de l'enceinte, de celle du corps et du lieu où on le place. Ainsi tous les points de l'espace dont il s'agit ont une même température, savoir, celle que prendraient les molécules que l'on y placerait, et cette température de l'espace est celle de

l'enceinte qui le borne. Lorsque plusieurs corps ont acquis la température commune de l'espace dans lequel ils ont été placés, ils conservent toujours cette température. Un élément quelconque de la surface d'un de ces corps est le centre d'une infinité de rayons qui composent un hémisphère continuellement rempli de chaleur. L'intensité d'un rayon est proportionnelle au sinus de l'angle qu'il fait avec l'élément de la surface dont il sort. Ce même rayon est toujours accompagné d'un rayon contraire qui, ayant la même intensité, se meut dans le sens opposé, et s'avance vers la surface dont le premier s'éloigne. C'est ainsi que chaque point de la surface d'un corps est le centre de deux hémisphères qui se pénètrent mutuellement; l'un est composé des rayons émis et l'autre des rayons contraires envoyés par les autres corps.

98. Si l'on imagine une surface plane infiniment petite ω tracée dans l'espace et pouvant être librement traversée par les rayons de chaleur, lorsque l'équilibre de température sera établi, cet élément recevra une infinité de rayons sur les deux côtés opposés A et A' de sa surface. Ce disque infiniment petit est donc en même temps le centre d'un hémisphère composé de rayons qui tombent sur le côté A de la surface, et celui d'un hémisphère composé de rayons qui s'éloignent de cette même surface A ; et il est très-facile de voir que l'intensité de ces rayons incidents ou émis est nécessairement proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence ou d'émission. Donc ce côté A de la surface de l'élément ω produit exactement le même effet que si ω faisait partie de la surface d'un corps solide, parvenu à la température commune. Le même raisonnement s'applique à toutes les parties d'une surface quelconque qui, ayant été tracée dans l'espace, serait traversée dans tous les sens par les rayons de chaleur. Donc, si des corps placés dans l'espace ont acquis des températures

égales, et si l'on supprime tout-à-coup un de ces corps, l'équilibre de la chaleur s'établira et subsistera de la même manière qu'auparavant. En effet, les surfaces qui terminent la portion de l'espace que le corps occupait, recevront ou transmettront des quantités de chaleur exactement égales à celles que le corps recevait lui-même, ou envoyait aux corps environnans dont la température était égale à la sienne. Il faut bien remarquer que cette compensation ne peut avoir lieu qu'autant que l'intensité des rayons décroît suivant la loi que nous avons démontrée. Dans toute autre hypothèse, l'effet des rayons envoyés par un corps solide parvenu à la température commune ne serait point le même que celui des rayons qui, après la suppression du corps, traversent librement l'espace qu'il occupait. On voit d'après cela pourquoi le déplacement de diverses masses parvenues à des températures égales n'apporte aucun changement dans l'équilibre de la chaleur.

99. Il faut considérer maintenant que les rayons de chaleur qui tombent sur la surface d'un corps ne pénètrent point tous au-delà de la surface qui les reçoit : une partie de cette chaleur est réfléchie dans l'espace environnant, et s'ajoute à celle que le corps lui-même lui envoie. Cette propriété dépend de l'état de la surface sur laquelle tombent les rayons de chaleur. La quantité des rayons réfléchis est très-grande lorsque la surface est métallique et exactement polie. On remarque aussi des différences considérables dans les quantités de chaleur que les divers corps peuvent envoyer, à températures égales. Ainsi deux surfaces planes, égales et également échauffées, envoient à l'espace environnant des quantités de chaleur très-inégaux si l'une est polie et l'autre dépolie ou couverte d'un enduit. Or les observations nous ont appris qu'il y a une relation constante entre la propriété

de réfléchir les rayons et celle de les transmettre. Cette même cause, inconnue jusqu'ici, qui s'oppose à l'admission des rayons incidents et en réfléchit une partie, est également contraire à la projection des rayons que les corps échauffés tendent à envoyer dans l'espace; elle tend aussi à les réfléchir vers l'intérieur des corps, et ne laisse échapper dans l'espace qu'une partie de ces rayons. Toutes les fois que, par un changement quelconque opéré à la surface, on diminue la faculté d'admettre les rayons incidents, on diminue aussi, et dans le même rapport, la faculté de les projeter au dehors. Si l'élément ω de la surface d'un corps parvenu à la température commune de l'espace reçoit un rayon R (*fig. 6*), qui fait avec la surface un angle φ , ce rayon se divise en deux parties $R\alpha$ et $R(1-\alpha)$, dont l'une poursuit sa route en pénétrant dans la masse, et l'autre se réfléchit, comme la lumière, sous le même angle φ . Puisqu'on suppose que le corps est parvenu à la température de l'espace, il suit des principes que nous avons exposés qu'il doit y avoir en même temps un second rayon r égal au précédent, et qui tombe aussi sur la surface en faisant avec elle l'angle φ , suivant une direction contraire à celle du rayon réfléchi $R(1-\alpha)$. Ce rayon incident alterne r se divise, comme le précédent, en deux parties, dont l'une $r\alpha$ pénètre dans la masse et l'autre $r(1-\alpha)$ suit une route contraire à celle du rayon incident R . Si la surface au point ω n'avait point la propriété de s'opposer à l'émission de la chaleur, la température du corps étant devenue constante il s'échapperait sous l'angle φ un rayon R' égal à R , et suivant une direction contraire; mais ce rayon projeté R' est, comme le rayon incident R , divisé en deux parties $R'\alpha$ et $R'(1-\alpha)$; l'une poursuit sa route et s'éloigne du corps, tandis que l'autre partie $R'(1-\alpha)$ se réfléchit vers l'intérieur, en suivant la même route que le rayon r . Enfin un quatrième rayon r' égal à R tend également à

sortir sous le même angle φ , suivant une direction opposée à celle de r ; mais il se divise en deux parties $r'a$ et $r'(1-a)$, dont l'une s'éloigne du corps et dont l'autre est réfléchie vers l'intérieur de la masse.

On voit par-là que le point ω envoie selon la direction de r' les deux rayons $r'a$ et $R(1-a)$, et qu'il envoie aussi selon la direction de R' les deux rayons $R'a$ et $r(1-a)$. Ce même point reçoit dans l'intérieur du solide selon la direction R les deux rayons Ra et $r'(1-a)$; enfin il reçoit selon la direction r les deux rayons ra et $R'(1-a)$. Comme les quantités R, r, R', r' , sont égales par l'hypothèse, il s'ensuit que l'élément ω reçoit sous l'angle φ un rayon égal à R , et qu'il envoie aussi sous cet angle un même rayon R ; c'est ce qui aurait lieu si la surface était entièrement privée de la propriété de réfléchir les rayons. Donc l'existence de cette propriété, et son plus ou moins d'intensité, n'apportent aucun changement dans l'équilibre de la chaleur.

Il n'en serait pas de même si la fraction a qui convient aux rayons incidens R et r , n'était point la même que celle qui convient aux rayons projetés R' et r' . Il arriverait alors que la quantité de chaleur admise différerait de la quantité de chaleur émise, et la température du corps ne serait point constante. Supposons, par exemple, que le corps M , parvenu à la température commune A de l'espace, soit tout-à-coup remplacé par un corps N de même forme, de même substance et de même température que le premier, mais qui en diffère par l'état de la surface. Ce corps N ne pourrait point conserver la température A , si le changement de la surface qui augmente ou diminue la facilité de réfléchir les rayons, ne modifiait pas également la facilité de les émettre dans l'espace : or il est entièrement contraire aux faits de supposer que le corps N prenne une température différente de A ; donc il n'y a

aucun doute que la surface réfléchissante n'exerce également son action contre les rayons qui tendent à pénétrer dans le solide, et contre ceux qui tendent à en sortir. Il suit de là que, dans l'équilibre de la chaleur, l'intensité des rayons émis décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission, quelle que soit d'ailleurs la nature des surfaces; il faut seulement concevoir que les rayons réfléchis s'ajoutent à ceux que le corps envoie de lui-même, et que ces deux parties composent le rayon émis, dont l'intensité décroît comme le sinus de l'angle d'émission.

Cette propriété de repousser les rayons incidents, qui varie beaucoup avec l'état des surfaces et qui n'apporte aucun changement dans l'état d'équilibre, a une influence considérable sur les progrès de l'échauffement et du refroidissement. Si le corps M , placé dans l'espace dont la température commune est A , a lui-même une température inférieure B , les rayons R et R' n'auront plus la même intensité, et il est facile de voir que l'augmentation de chaleur produite par le rayon R sera proportionnelle à $\alpha (R - R')$. Donc la masse s'échauffera d'autant plus vite que la fraction α approchera plus de l'unité. Si la surface jouissait à un très-haut degré de la propriété de réfléchir la chaleur, le coefficient α serait très-petit, et le corps s'échaufferait ou se refroidirait avec une extrême lenteur.

Ainsi, lorsque, dans un espace vide d'air que termine une enceinte solide entretenue à une température constante, on place plusieurs masses solides qui diffèrent par la substance et par la figure ou par l'état des surfaces, ces divers corps, quelle que soit leur température initiale, tendent continuellement à acquérir une température commune, qui est celle de l'enceinte. Ils s'échauffent ou se refroidissent plus ou moins lentement, selon qu'ils jouissent à un plus haut degré de la propriété de réfléchir les rayons incidents; mais cette qualité

n'influe ni sur la valeur de la température finale, ni sur la loi du décroissement de l'intensité des rayons émis dans l'état d'équilibre. Si, par exemple, l'un de ces corps réfléchit toute la chaleur qui lui est envoyée, en sorte que la valeur de α soit nulle, il n'acquerra jamais la température commune; mais il contribuera également à l'équilibre de la chaleur, en réfléchissant les rayons qui tombent sur lui, et dont il ne change point la température.

Il faut bien remarquer que les rayons qui sortent de l'intérieur du solide, et qui, après avoir rencontré une surface propre à les réfléchir, changent de direction, en continuant de se propager dans l'espace, conservent toujours leur température primitive; celle de la surface réfléchissante ne peut ni augmenter ni diminuer la température des rayons réfléchis, en sorte que le corps qui absorbe ces derniers rayons, en reçoit la même impression que s'ils lui étaient envoyés directement. Ce fait est connu depuis long-temps, et se manifeste dans les observations sur la réflexion du froid; il est devenu très-sensible dans plusieurs expériences que nous avons faites récemment pour observer les lois de l'émission de la chaleur. Par exemple, on a transporté un plateau de glace G (*fig. 7*) dans une pièce fermée, dont toutes les parties avaient acquis une température constante supérieure à 0. On y avait placé un thermoscope T très-sensible et qui était devenu stationnaire. Lorsqu'on présentait le plateau G à une certaine distance du thermoscope, l'indice se mettait aussitôt en mouvement, et se rapprochait de la boule. En effet, avant que le plateau de glace fût apporté, la boule du thermoscope recevait de toutes parts des rayons également chauds; et comme elle envoyait elle-même une quantité de chaleur égale à celle qu'elle recevait, elle conservait sa température: mais, lorsque la masse G était placée, cette masse interceptait une partie des rayons qui tombaient auparavant sur la boule, et ces

rayons étaient remplacés par des rayons plus froids, sortis de la glace. C'est pour cela que la température du thermoscope s'abaissait jusqu'à ce que la quantité de chaleur envoyée par la boule devînt égale à celle qu'elle recevait. On approchait ensuite une surface métallique polie M , propre à réfléchir sur la boule T les rayons sortis du corps glacé G ; alors la température du thermoscope s'abaissait de nouveau d'une quantité considérable. En effet, en plaçant le miroir M , on interceptait encore une partie des rayons que la boule T recevait des corps environnans; ces rayons étaient remplacés par ceux qui sortaient de l'intérieur même du miroir, et aussi par ceux qui, sortis de la masse froide G , se réfléchissaient à la surface du miroir et tombaient sur la boule T . Cette boule recevait donc, après qu'on avait approché le miroir, plus de rayons froids et moins de rayons chauds qu'auparavant; c'est pour cette raison que la présence du miroir M fait toujours abaisser la température. Lorsque le miroir M n'était point placé, la boule T se trouvait seulement exposée aux émanations d'un plateau de glace; mais, lorsque le miroir était en m , cette boule se trouvait, pour ainsi dire, placée entre deux masses froides, en sorte qu'elle perdait une nouvelle partie de sa chaleur.

Avant qu'on plaçât le miroir M , il était ordinairement entretenu à la température de l'appartement: mais nous avons plusieurs fois échauffé ce miroir de quelques degrés au-dessus de cette température commune; dans cet état on le plaçait en m , et il arrivait encore que la boule T se refroidissait très-sensiblement. Les rayons plus chauds sortis du miroir même ne suffisaient point pour compenser l'effet des rayons émanés du plateau et réfléchis par sa surface sur la boule T . Nous avons toujours observé que, si l'on approchait de T le miroir Mm , en plaçant cette dernière surface de telle manière qu'elle ne pût réfléchir sur T les rayons émanés de Gg , la tempéra-

ture du thermoscope s'élevait, le miroir $M m$ étant plus échauffé que les corps environnans : mais, lorsqu'on mettait cette même surface $M m$ dans la situation propre à réfléchir sur la boule T les rayons sortis de $G g$, la température du thermoscope s'abaissait.

Si ensuite on enlevait le plateau de glace, l'indice du thermoscope commençait aussitôt à se mouvoir ; il s'élevait jusqu'à ce qu'il marquât une température supérieure à celle de l'appareil. Enfin, en retirant le miroir, l'indice se rapprochait de la boule, et marquait la température commune. Au reste, ces résultats sont connus de tous les physiciens qui ont observé attentivement les effets de la chaleur. Ils s'expliquent très-facilement, lorsque l'on considère que la température des surfaces réfléchissantes n'influe point sur celle des rayons réfléchis.

100. Pour achever cette théorie de l'équilibre de la chaleur rayonnante, il nous reste à découvrir la cause qui fait diminuer l'intensité des rayons émis proportionnellement au sinus de l'angle d'émission. On parviendra à l'explication mathématique de ce phénomène, en examinant comment toutes les molécules infiniment voisines de la surface concourent à l'émission perpendiculaire ou oblique de la chaleur.

Supposons que le plan AB (*fig. 8*) termine une masse solide échauffée qui conserve la température a , et sépare cette masse du milieu environnant qui conserve la température 0 ; chaque point du plan AB pourra être regardé comme le centre d'un hémisphère continuellement rempli de chaleur. La question consiste à comparer l'intensité des rayons obliques à celle des rayons perpendiculaires.

Il résulte, en premier lieu, de toutes les observations, qu'il n'y a qu'une couche extrêmement mince des corps opaques qui puisse contribuer à la projection immédiate de

la chaleur. Ainsi, en concevant le solide divisé en un très-grand nombre de couches parallèles d'une très-petite épaisseur, on voit que la couche extrême terminée par le plan AB est la seule qui puisse porter immédiatement jusque dans le vide la chaleur dont elle est pénétrée. Mais les différentes parties de cette dernière couche ne concourent point également à cet effet, quoiqu'elles aient toutes la même température que les points de la surface. Les points qui sont situés à la superficie, envoient la chaleur dans tous les sens avec une égale facilité : ceux qui sont un peu au-dessous de la surface, n'envoient pas aussi facilement la chaleur au-delà des limites du corps ; celle qu'ils projettent s'arrête en partie sur les molécules solides qui les séparent de l'espace extérieur : il n'y a qu'une partie de cette chaleur projetée qui parvient jusqu'à l'espace et qui s'y répand. De plus, ces mêmes points envoient moins de chaleur jusqu'aux limites du corps en suivant une direction oblique, que selon la perpendiculaire. Cette différence provient encore de l'interposition des molécules solides, qui sont en plus grand nombre dans les directions obliques.

Chaque point de la normale om envoie perpendiculairement à la surface, suivant mo , une certaine quantité de chaleur ; et chaque point de cette même normale envoie aussi jusque dans l'espace E une certaine quantité de chaleur suivant une direction oblique, parallèle à une ligne donnée CD . Soit μ la quantité totale de chaleur que le filet solide om projette jusque dans l'espace extérieur E , perpendiculairement à la surface AB ; et soit ν la quantité totale de chaleur que le même filet solide projette jusque dans l'espace, selon la direction parallèle à CD ; on va démontrer qu'on a toujours l'équation $\nu = \mu \sin \phi$, ϕ étant l'angle que CD fait avec le plan. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à tous les filets perpendiculaires dont la base est sur le plan AB ,

on en conclura que la quantité totale de chaleur qui traverse le plan selon la direction perpendiculaire, est à la quantité totale qui le traverse selon la direction parallèle à CD , dans le rapport de 1 à $\sin \varphi$: tout se réduit donc à comparer les quantités μ et ν .

Supposons qu'à la distance oa (*fig. 9*) la molécule a puisse envoyer selon la normale, et jusque dans l'espace extérieur, une quantité de chaleur désignée par l'ordonnée ap . Concevons en général que l'on ait décrit une courbe mpq , dont chaque ordonnée ap ou βq représente la quantité de chaleur qui peut être envoyée dans l'espace, selon la normale, par la molécule a ou β placée à l'extrémité de l'abscisse qui répond à cette ordonnée ap ou βq . La ligne mpq dépend, suivant une loi inconnue, de la nature de la substance solide, et l'on peut dire que chacune de ces substances a une certaine courbe qui lui est propre. Le point d'intersection entre la courbe et l'axe om est le dernier point de cette normale qui puisse projeter une partie de la chaleur jusque dans l'espace E ; celle qui est envoyée par les autres points plus éloignés de o , ne parvient point jusqu'aux limites du solide. Il est facile de voir que la quantité totale de chaleur μ envoyée perpendiculairement par la ligne om dans l'espace E est représentée par l'aire comprise entre om et mpq .

On trouvera maintenant la quantité totale ν que cette même ligne envoie à l'espace parallèlement à la direction CD , en concevant une seconde courbe $m'p'q'$, dont les ordonnées représentent les quantités de chaleur envoyées selon la direction CD . Ainsi, pour connaître combien le point a' envoie de chaleur parallèlement à CD jusque dans l'espace E , on mènera par ce point a' l'oblique $a'a'$ parallèle à CD ; ensuite on portera cette ligne $a'a'$, de o en a , sur l'axe de la première courbe. L'ordonnée ap désignera la quantité de chaleur envoyée obliquement. On élèvera donc en a' l'ordonnée $a'p'$ égale à ap .

On construirait par ce moyen la seconde courbe $m'p'q'$, et l'aire comprise entre cette courbe et la normale om' exprimerait le produit total v de l'émission oblique. Or, si l'on compare ces deux courbes, on voit que pour une même abscisse ap ou $a'p'$ les ordonnées correspondantes sont dans un rapport constant, qui est celui de 1 à $\sin \varphi$. Donc ce rapport est celui des aires μ et v ; ainsi l'on a cette relation, $v = \mu \sin \varphi$.

On obtient aisément ce résultat sans employer les constructions. En effet, soit φa la fonction inconnue qui exprime combien le point placé au-dessous de la surface, à une distance perpendiculaire a , peut envoyer de chaleur au-delà de cette surface, selon la direction de la normale; et soit a la plus grande valeur que puisse avoir a , c'est-à-dire que, si la distance a est plus grande que a , la valeur de φa est toujours nulle. L'intégrale $\int da \varphi a$, prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a$, donnera la valeur de la quantité totale μ envoyée perpendiculairement dans l'espace par le filet solide om . Mais, si l'émission est oblique, le même point a se trouvera distant du point de la surface où il dirige ses rayons d'une quantité

égale $\frac{a}{\sin \varphi}$; donc il ne pourra envoyer dans l'espace extérieur qu'une quantité de chaleur exprimée par $\varphi \left(\frac{a}{\sin \varphi} \right)$.

L'intégrale $\int da \varphi \left(\frac{a}{\sin \varphi} \right)$, prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a$, sera donc la valeur du produit total v de l'émission oblique. Soit $\frac{a}{\sin \varphi} = \beta$: on aura

$$\int da \varphi \left(\frac{a}{\sin \varphi} \right) = \sin \varphi \cdot \int d\beta \varphi \beta,$$

et cette seconde intégrale devra être prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a$; ou, ce qui est la même chose, depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = a \sin \varphi$. Mais il est évident, d'après l'hypothèse,

que toute valeur de β plus grande que $a \sin \varphi$ donnerait des valeurs nulles pour $\varphi(\beta)$: donc l'intégrale $\int d\beta \varphi \beta$ peut être prise depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = a$; ainsi elle ne diffère point de $\int da \varphi a$ prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a$. On a donc $v = \sin \varphi \int da \varphi a = \mu \sin \varphi$.

Il suit de là que, sans connaître la fonction φa , qui varie avec la nature de chaque substance solide, on est assuré que la quantité totale de chaleur qui sort perpendiculairement d'une surface échauffée, est plus grande que la quantité qui sort obliquement de cette même surface, et que le rapport de ces deux quantités est celui du rayon au sinus de l'angle d'émission.

On voit maintenant que l'on pourrait parvenir de différentes manières à déterminer cette loi du décroissement de l'intensité des rayons. Nous avons obtenu ce résultat en considérant l'égalité qui s'établit entre les températures des corps placés dans une enceinte commune; nous aurions pu le déduire de l'examen même de la cause qui le produit; enfin il est expressément indiqué par les expériences, comme le prouvent les ouvrages de MM. Leslie, Rumford, et Prevost de Genève.

L'existence de cette loi est une conséquence certaine des causes qui déterminent la propagation de la chaleur dans les corps solides. C'est pour cette raison que le théorème énoncé en la page 180 nous a paru avoir une connexion nécessaire avec la matière que nous traitons, quoiqu'il se rapporte au mouvement de la chaleur dans le vide. Nous aurions regardé comme incomplète la théorie de la propagation de la chaleur dans les solides, si nous n'avions point considéré la loi à laquelle cette propagation est assujettie dans l'enveloppe extrêmement mince qui termine les corps, et si nous n'avions point expliqué comment ces mêmes corps solides parviennent, indépendamment du contact, à l'équilibre de température.

Nous devons donc espérer que cette partie de notre ouvrage ne sera point regardée comme étrangère à l'objet principal que nous nous sommes proposé.

Le traité que M. le professeur Prevost a publié en 1809 sur la chaleur rayonnante, contient l'exposition des phénomènes connus qui dépendent de cette théorie. L'auteur a donné le premier une hypothèse physique qui explique très-clairement la réflexion apparente du froid et toutes les circonstances de l'équilibre de la chaleur. M. le docteur Leslie, d'Édimbourg, et M. le comte de Rumford, ont enrichi cette branche de la physique d'un grand nombre de faits nouveaux. Toutes ces découvertes ont été préparées et excitées par les recherches de M. M.-A. Pictet, à qui l'on doit des expériences capitales, et qui a fait connaître le premier toute l'importance des recherches de ce genre (*Essai sur le feu*, publié en 1790).

MM. Leslie et Prevost avaient déjà considéré comme indiquée par les observations la loi du décroissement de l'intensité des rayons obliques. Le premier attribue d'abord cette loi à l'émission de la lumière. Voici ses expressions : « Puis-
» que le boulet devenu rouge ne se distingue pas d'un disque
» lumineux, il s'ensuit que la lumière est émise avec moins
» d'abondance dans les directions obliques, et que la densité
» des rayons est à peu près comme le sinus de leur déviation
» de la perpendiculaire: »

M. Prevost, après avoir cité ces mêmes expressions, ajoute :
« Voilà une analogie dont on peut faire l'application au calo-
» rique rayonnant, et, en effet, des expériences que nous rap-
» porterons portent à croire que l'émission du calorique est
» assujettie à la même loi. » Et plus loin : « J'ai dit ci-dessus
» qu'il paraissait, par quelques expériences de M. Leslie, que
» le calorique émanait avec plus d'abondance selon la direc-
» tion perpendiculaire à la surface qui l'émet, que selon toute

» autre direction : voici les expériences qui rendent ce fait
» probable. »

Elles consistent principalement dans l'observation qu'a faite M. Leslie, de l'effet produit par une surface échauffée à laquelle on donnait des situations plus ou moins obliques.

On place un miroir métallique concave m (*fig. 10*), d'une forme parabolique, devant une surface plane échauffée vv , dont les rayons, réfléchis par le miroir, échauffent la boule t d'un thermoscope placé près du foyer. Deux plans $e e$ interceptent une partie des rayons envoyés par le plan échauffé vv , et ces écrans sont séparés par un intervalle nn , qui laisse parvenir une partie des rayons en mmm . Après avoir observé et mesuré l'effet que produisent sur le thermoscope les rayons émanés du plan échauffé dans la position vv , on change cette position, et l'on donne à la surface la direction $v'v'$, sans changer la place du centre. On observe alors que l'effet produit sur le thermoscope est à très-peu près le même qu'auparavant.

Il faut supposer, 1.^o que la température de la surface est la même en vv et en $v'v'$, ou qu'on tient compte de la diminution de température; 2.^o que le déplacement n'est point assez grand pour que la ligne $v'n$, qui passe par l'extrémité du plan échauffé et celle de l'écran, cesse de rencontrer le miroir.

M. Leslie, après avoir rapporté ces expériences, et remarqué des circonstances accessoires qui lui paraissent devoir se compenser presque exactement, ajoute : « Je suis disposé à
» compenser ce déficit par ce que j'ai remarqué ci-dessus.
» Nous pouvons donc conclure en général que l'action éloignée d'une surface échauffée est équivalente à celle de sa
» projection orthographique, et doit être estimée par la grandeur visuelle de la source. »

On voit par ces citations qu'en observant les effets des

rayons obliques, on a été naturellement conduit à leur attribuer une intensité variable et proportionnelle au sinus de l'angle d'émission.

L'action de la chaleur rayonnante est assujettie dans les espaces vides d'air aux lois mathématiques que nous avons exposées : mais, lorsqu'elle se propage dans l'atmosphère, elle suit des lois différentes et beaucoup moins simples, qui sont aujourd'hui presque entièrement ignorées. L'air interposé reçoit en partie la chaleur rayonnante, et il agit ensuite lui-même sur les corps voisins. Nous avons plusieurs fois constaté par des expériences attentives cette influence marquée de la présence de l'air. Comme l'emploi des miroirs concaves complique les résultats en même temps qu'il les rend plus sensibles, nous avons mesuré l'action directe d'une surface échauffée sur la boule d'un thermoscope qu'on plaçait à différentes distances. On a apporté un soin extrême dans ces observations, et l'on a reconnu que les lois qui seraient observées dans les espaces vides sont notablement altérées par l'action de l'air intermédiaire. Ainsi l'effet produit par une surface inclinée se rapproche visiblement de celui de la projection orthographique ; mais il y a toujours une différence très-sensible entre les deux résultats.

Pour rendre plus manifeste cet effet de l'interposition de l'air, on avait introduit dans une enveloppe conique, et vers le sommet en t' (*fig. 11*), la boule d'un thermoscope ; on plaçait ensuite ce récipient à côté et au-dessus d'une surface échauffée vv ; un écran ee empêchait les rayons sortis de vv de tomber directement sur la surface intérieure du récipient. On a toujours remarqué que la boule du thermoscope s'échauffait rapidement, et il a été facile de reconnaître que cela provenait de l'air intermédiaire mmm , qui, étant échauffé, montait dans le récipient. Ainsi tout corps exposé dans l'air à l'action directe d'une surface échauffée éprouve en même temps celle

D d *

d'une masse fluide qui l'environne de toutes parts, et cet effet accessoire est une partie notable de l'effet principal.

Ces mêmes expériences qui avaient pour objet de mesurer avec précision l'action directe d'une surface échauffée sur la boule du thermoscope, nous ont donné lieu d'examiner comment l'accroissement de la distance, en augmentant la quantité d'air interposé, concourt à la diminution de l'effet produit : mais nous avons obtenu des résultats sensiblement différens de ceux qui auraient lieu d'après la règle proposée par M. Leslie, et qu'il a conclue de quelques-unes de ses observations sur la chaleur réfléchie.

Quant à l'action des rayons solaires, elle doit, à plusieurs égards, être distinguée de celle de la chaleur obscure. Nous appelons ainsi celle qui, ne pouvant traverser directement les liquides diaphanes, ne rend point les corps visibles. Pour faire connaître la nécessité de cette distinction, il nous suffira de rapporter l'expérience suivante, que nous avons faite récemment.

On a placé au-devant de la boule d'un thermoscope un plateau de glace transparente, d'une épaisseur assez considérable; on a ensuite approché rapidement au-devant du plateau une plaque de fer très-échauffée, mais non lumineuse; on n'a remarqué aucun mouvement dans l'indice du thermoscope (la boule était garantie, de toutes parts, de l'accès de l'air échauffé, et l'on avait pris toutes les précautions requises). On a ensuite retiré la plaque échauffée, et on l'a remplacée par la flamme d'une bougie ordinaire : aussitôt l'indice du thermoscope s'est mis en mouvement. On a répété plusieurs fois ces épreuves, et l'on n'a pu observer quelque mouvement dans le thermoscope qu'en faisant rougir la plaque métallique. L'instrument était très-sensible, car l'étendue d'un degré octogésimal était d'environ deux pouces; et il était aussi très-mobile, car l'indice commençait à marcher lorsqu'on présentait

la main étendue au-devant de la boule à quatre ou cinq pieds de distance.

Il résulte de cette expérience et de plusieurs autres que la chaleur rayonnante, qui ne pénètre point directement les liquides diaphanes, soit parce qu'elle manque de vitesse, soit pour toute autre cause, ne se comporte point dans l'air et dans les solides transparens comme celle qui émane des foyers lumineux. Il faudra donc avoir égard à cette distinction lorsqu'on entreprendra de déterminer l'action des rayons solaires sur l'atmosphère et sur les eaux. Ces recherches ne peuvent être fondées que sur une longue série d'observations. Au reste, elles n'appartiennent point à la matière que nous traitons aujourd'hui. Il faut bien remarquer qu'en soumettant au calcul la question des températures terrestres, nous avons écarté tout ce qu'il pourrait y avoir d'hypothétique et d'incertain dans la mesure de l'effet des rayons solaires. En effet, on peut regarder l'état de la surface du globe comme donné par les observations, et il s'agit ensuite d'en déduire l'état des molécules intérieures. Cette dernière question dépend entièrement de notre théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides.

XIV.

Comparaison des Résultats de la Théorie avec ceux de diverses Expériences.

101. Il nous reste à comparer les résultats que fournit l'analyse avec ceux de nos propres expériences. Ces observations ont été faites avec beaucoup de soin, et souvent répétées. Le nouveau degré de précision que nous sommes parvenus à leur donner, nous a fait reconnaître une conformité encore plus exacte entre les faits et la théorie. Pour établir avec

ordre cette comparaison, nous avons considéré, dans les diverses questions, les résultats les plus remarquables et qu'on peut constater avec précision. Ainsi, la théorie faisant connaître que les températures fixes de divers points placés à distances égales sur la circonférence de l'armille forment une série récurrente (art. 10), nous avons cherché à vérifier ce résultat en mesurant les températures a, b, c, d , de quatre points consécutifs, et en comparant le quotient $\frac{a+c}{b}$ au quotient $\frac{b+d}{c}$, qui doit être le même que le précédent.

Il n'est pas moins facile d'observer, pendant le refroidissement de l'armille, les températures A et A' de deux points situés aux deux extrémités d'un même diamètre, et de les comparer aux températures B et B' de deux autres points situés aux extrémités d'un autre diamètre. Les deux sommes $A + A'$ et $B + B'$ doivent tendre de plus en plus à devenir et à demeurer égales pendant la durée du refroidissement (art. 37). Il faut examiner si cette relation, donnée par la théorie, se manifeste dans les expériences.

On a vu aussi que le système variable des températures des différens points d'un corps donné s'approche continuellement d'un état régulier et final, dans lequel les rapports des températures ne changent plus avec le temps, chacune d'elles décroissant comme l'ordonnée d'une même logarithmique dont le temps est l'abscisse. Il s'agit donc d'observer les températures v_1, v_2, v_3, v_4 , &c. d'un point déterminé, correspondantes aux temps t_1, t_2, t_3, t_4 , &c., et de comparer entre elles les quantités $\frac{\log v_1 - \log v_2}{t_2 - t_1}, \frac{\log v_2 - \log v_3}{t_3 - t_2}$, &c. afin de reconnaître si ces quantités sont ou deviennent sensiblement égales, comme la théorie le suppose.

En général, le calcul nous apprenant que la chaleur affecte

toujours dans l'intérieur des solides une disposition régulière et symétrique, il est intéressant de rendre ces propriétés sensibles par l'expérience, et de pouvoir distinguer à quelque caractère certain si le système des températures est entré et persiste dans cet état régulier, indépendant de l'échauffement initial.

Nous n'avons pas eu seulement pour but dans ces expériences de vérifier les résultats remarquables de la théorie; nous les avons encore choisies telles qu'on pût connaître pour une substance (le fer) les trois qualités spécifiques qu'il est nécessaire de mesurer pour faire l'application des formules. Ces élémens sont la conducibilité propre, la conducibilité extérieure et la capacité spécifique de chaleur.

La première expérience a été faite sur un anneau de fer poli, exposé par un de ses points à l'action d'une chaleur constante. On a placé sur trois supports de bois sec un anneau de fer poli d'environ un pied de diamètre; son plan est horizontal; il est percé de six trous, comme on le voit dans la *figure 12*. Les trois premiers occupent le quart de la circonférence, et leur distance est du huitième de cette circonférence; les trois autres leur sont diamétralement opposés (1). Les trous ne pénètrent point jusqu'à la surface inférieure, mais seulement au-delà du milieu de l'épaisseur. On a placé dans l'armille divers thermomètres, en sorte que le centre du réservoir de chacun correspondît au milieu de l'épaisseur; on a ensuite rempli avec du mercure les trous où l'on avait mis les thermomètres; ceux qui restaient et qui n'avaient pas de thermomètres ont aussi été remplis avec du mercure. On a échauffé l'anneau en plaçant au-dessous une lampe d'Argant

(1) Le diamètre total mp est $0^m,345$; le diamètre intérieur nr est $0^m,293$; l'épaisseur mn est $0^m,026$; la hauteur pq , $0^m,040$: pour chacun des trous le diamètre est $0^m,0145$; la hauteur, $0^m,0270$.

dont on pouvait augmenter ou diminuer la flamme. On observait la température de l'appartement au moyen d'un thermomètre libre; l'air était tranquille; on tenait échauffée une pièce voisine du lieu de l'expérience, et l'on entr'ouvrait, lorsqu'il était nécessaire, la porte de communication avec cette étuve. On est parvenu ainsi à retenir dans un degré fixe la température de l'air. Le point au-dessous duquel on avait mis le foyer était très-voisin d'un des thermomètres placés dans l'armille, et l'on réglait continuellement l'activité de la flamme, en sorte que ce thermomètre marquait un degré fixe. En apportant beaucoup de soin dans ces expériences, on est parvenu, après des tentatives réitérées, à entretenir dans un état fixe, pendant plus de cinq heures consécutives, la température de l'air et celle du thermomètre voisin du foyer. Les thermomètres plus éloignés se sont élevés successivement; leur mouvement s'est ralenti de plus en plus, ensuite il a cessé. Les températures ont été stationnaires pendant un long temps, et alors on les a observées. On a fait plusieurs expériences de ce genre, en variant la position des foyers, celle des thermomètres, et l'état des surfaces, qui étaient très-polies, ou enduites, ou recouvertes de diverses enveloppes. Quelquefois on a exposé l'anneau à l'action constante de plusieurs foyers appliqués à des points différens. Dans tous ces cas, on observait les températures stationnaires A, B, C de trois thermomètres consécutifs, et, retranchant la température commune de l'air, on comparait les trois élévations a, b, c , afin de connaître le rapport $\frac{a+c}{b}$. Chaque expérience donnait au moins une valeur de ce rapport, et l'on a remarqué en effet que cette valeur était constante (voir art. 10), et qu'elle ne dépendait ni de l'intensité des foyers, ni des points où ils étaient placés. Mais ce quotient change avec l'état des surfaces, et il varie aussi lorsque la distance de

deux thermomètres consécutifs devient plus grande. En désignant par q la valeur que prend ce rapport lorsque la distance de deux thermomètres est un huitième de la circonférence, et par r la valeur qui convient à une distance double, on a trouvé par la théorie la relation suivante $q = \sqrt{r+2}$; ce qui est exactement conforme aux observations (voy. art. 10, et ci-dessous, page 218).

On va maintenant rapporter les résultats numériques des six observations qui ont été faites sans que l'état des surfaces fût changé. 1.° Les thermomètres a, b, c, d , étaient placés comme l'indique la *figure 13*. Le foyer permanent était au-dessous du point f voisin du point c ; le thermomètre c , qui était en ce dernier point, a marqué constamment $99^{\text{d}} \frac{1}{3}$ à l'échelle octogésimale, et la température permanente de l'air était de $17^{\text{d}} \frac{1}{3}$. Il s'est écoulé $4^{\text{h}} 24'$ depuis le moment où l'on a posé le foyer jusqu'à celui où l'on a mesuré les températures stationnaires: on les a trouvées alors telles qu'elles sont indiquées dans la table ci-jointe. Les points 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, désignent les points de division de la circonférence, partagée en huit parties égales; $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$, désignent les quantités dont la température de ces points surpasse la température de l'air. Le point c correspond au point 0, et l'on connaît par l'expérience les quatre quantités z_0, z_2, z_3, z_4 .

Le thermomètre	marque	Excès de la température du point sur celle de l'air.	Température de l'air.
c	$99^{\text{d}} \frac{1}{3}$.	$z_0 = 81^{\text{d}} \frac{2}{3}$.	$17^{\text{d}} \frac{1}{3}$.
b	66^{d} .	$z_2 = 48^{\text{d}} \frac{1}{3}$.	
d	$50^{\text{d}} \frac{7}{12}$.	$z_3 = 32^{\text{d}} \frac{11}{12}$.	
a	44^{d} .	$z_4 = 26^{\text{d}} \frac{1}{3}$.	

Il résulte de la théorie (art. 10) que les élévations $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$, forment une série récurrente, et

que le quotient $\frac{z_2 + z_4}{z_3}$ est un nombre constant qui ne dépend que de la nature et des dimensions de l'anneau, et se trouverait toujours le même, de quelque côté qu'on plaçât les foyers de chaleur constante. On avait pour objet de trouver ce quotient, afin de le comparer à celui que donneraient d'autres observations : on n'avait alors que quatre thermomètres que l'on pût appliquer à l'armille; mais on pouvait suppléer au nombre des thermomètres en variant les observations.

On a trouvé $\frac{z_2 + z_4}{z_3} = 2,2683$, valeur du quotient cherché. On pouvait d'abord vérifier ce résultat par le calcul suivant. On a vu que le quotient $\frac{z_2 + z_4}{z_3}$ serait différent si la distance de deux thermomètres consécutifs, au lieu d'être égale au huitième de la circonférence, était égale à la quatrième partie de cette circonférence. On suppose qu'il y ait un thermomètre au point 6, et l'on désigne par z_6 l'élévation de la température de ce point au-dessus de celle de l'air. Soient $\frac{z_2 + z_4}{z_3} = q$ et $\frac{z_2 + z_6}{z_4} = r$; il est facile de trouver (voyez art. 10) entre q et r la relation suivante :

$$q = \omega + \frac{1}{\omega} \text{ et } r = \omega^2 + \frac{1}{\omega^2}.$$

Éliminant ω , on a $q = r \sqrt{r+2}$. Ainsi en déterminant r on en pourra conclure une nouvelle valeur de q .

Pour trouver r on aura les deux équations

$$\frac{z_2 + z_6}{z_4} = r \text{ et } \frac{z_4 + z_6}{z_6} = r;$$

éliminant z_6 , qui est inconnue, on a $r^2 z_4 - r z_2 = z_4 + z_6$.

On peut donc obtenir la valeur de r au moyen de z_0, z_3, z_4 , comme on a obtenu celle de q au moyen de z_2, z_3, z_4 . En faisant ce calcul, on a trouvé $r = 3,140$; et de l'équation $q = \sqrt{r+2}$, on a conclu $q = 2,2673$. Cette seconde valeur diffère extrêmement peu de la première. Au reste, il est probable que cette conformité résulte en partie de la compensation fortuite des erreurs.

On a fait diverses expériences du même genre, en variant la position des quatre thermomètres. Quelquefois on a placé plusieurs foyers, en apportant la plus grande attention pour que les thermomètres demeuraient stationnaires; ce à quoi l'on peut toujours parvenir. On a changé aussi la température de l'appartement, et l'on a prolongé la durée de l'état fixe des températures. Voici les résultats qu'on a obtenus :

La première expérience que nous venons de rapporter a donné deux valeurs de q ; savoir : $q = 2,267$, et $q = 2,268$.

Une seconde expérience a donné deux valeurs de q exprimées ainsi : $q = 2,29$, et $q = 2,28$.

Une troisième expérience a aussi donné deux valeurs de q , savoir : $q = 2,32$, et $q = 2,30$.

Une quatrième, où l'on n'avait employé que trois thermomètres, a donné une seule valeur; savoir : $q = 2,284$.

Une cinquième expérience a donné deux valeurs, savoir : $q = 2,29$, et $q = 2,29$.

Enfin la dernière expérience, que nous allons rapporter, a donné deux autres valeurs de q , savoir : $q = 2,32$, et $q = 2,31$.

On a placé quatre thermomètres aux points a, b, c, d (fig. 14) et le foyer au-dessous du point f : l'échauffement a duré $5^h 2'$. Alors on a observé les températures, qui étaient toutes stationnaires depuis environ $50'$. La table suivante indique ces températures fixes.

Le thermomètre	marque	Excès de la température du thermomètre sur celle de l'air.	Température de l'air.
<i>a</i>	117 ^d	98 ^d ,67.	
<i>b</i>	78 ^d ,87.	60 ^d ,54.	
<i>c</i>	60 ^d ,14.	41 ^d ,81.	18 ^d ,33.
<i>d</i>	59 ^d ,10.	40 ^d ,77.	

Le quotient q ou $\frac{a+c}{b}$ est 2,320 ; le quotient r ou $\frac{a+d}{c}$ est 3,335. Et si l'on calcule une seconde valeur de q au moyen de la relation $q = \sqrt{r+2}$, on trouve $q = 2,3098$.

Les six expériences ont donné onze valeurs du nombre q , qui peuvent servir à déterminer ce nombre très-exactement. L'erreur sera moindre que la quatre-vingt-dixième partie de la valeur du nombre, si l'on emploie les expériences faites en divers temps ; et si l'on ne se sert que des expériences faites le même jour, l'erreur sur la valeur de q sera beaucoup moindre que la deux-centième partie de cette valeur. On peut donc calculer avec précision le rapport $\frac{h}{k}$ des deux conducibilités (voyez art. 8).

Nous ferons remarquer que la valeur numérique de q , changeant avec l'état des surfaces (art. 8), a dû subir quelque altération dans notre armille. Les premières expériences ont été faites en 1806 et les dernières en 1811 : dans cet intervalle on entretenait de temps à autre l'état net et poli de la surface ; mais on n'a pu éviter quelque léger changement. C'est pour cela que les deux valeurs de q conclues d'une seule expérience sont en général plus voisines que celles qui ont été données par des expériences différentes. Au reste, on ne pouvait point attendre des résultats plus conformes entre eux, soit à cause des erreurs provenant des thermomètres, soit à raison des circonstances propres à l'expérience. En effet, les

résultats théoriques auxquels nous sommes parvenus, supposent que l'air est déplacé avec une vitesse uniforme; mais le courant d'air qui s'établit près de la surface de l'anneau, et emporte dans le sens vertical les molécules échauffées devenues plus légères, a une vitesse moindre dans les parties dont la température est moins élevée. Les points de l'anneau situés dans une même section perpendiculaire à l'axe n'ont point, comme on le suppose, une égale température. La différence, quelque petite qu'elle soit, influe sur les valeurs des températures fixes; il en est de même des interruptions qu'éprouve la masse de l'anneau, à raison des trous qui reçoivent les thermomètres et sont remplis de mercure; enfin il doit s'écouler une petite quantité de chaleur dans les supports. Toutes ces circonstances doivent altérer les résultats, et les éloigner de ceux que donne la théorie. On voit cependant qu'elles n'empêchent point qu'on n'obtienne des valeurs très-voisines des véritables.

102. On a observé aussi le mouvement de la chaleur dans cette même armille qui a servi aux expériences précédentes. Ce solide avait été placé sur trois supports de bois sec; son plan était horizontal, et l'on avait mis quatre thermomètres *a, b, c, d* (*fig. 15*) aux points désignés par ces lettres dans la figure; ensuite on avait rempli de mercure les trous *a, b, c, d*, et les deux autres *m* et *n*, qui n'avaient point de thermomètres. Un cinquième thermomètre était libre et servait à mesurer la température du lieu de l'expérience. La pièce où l'on observait était assez vaste, et l'on prenait soin de ne pas agiter l'air. Elle communiquait avec une seconde pièce échauffée, et l'on ouvrait, lorsqu'il était nécessaire, la porte de communication, afin d'obtenir une température constante; ce qui a eu lieu en effet.

Le point *f* ayant été exposé pendant 26' environ à la

flamme d'une lampe d'Argant, les thermomètres c , b , d , a , se sont élevés successivement. Après 26' écoulées, on a ôté le foyer, et dans ce moment, à 7^h 31', le thermomètre c marquait 127^d $\frac{2}{3}$ environ, et les autres marquaient exactement, savoir :

b	55 ^d $\frac{1}{2}$.
a	25 ^d
d	35 ^d $\frac{5}{6}$.
celui de la chambre désigné par t	18 ^d $\frac{1}{2}$.

A 7^h 34' le thermomètre c était descendu à 111^d $\frac{2}{3}$ environ ; et les autres thermomètres marquaient exactement, savoir :

b	57 ^d $\frac{4}{5}$.
c	26 ^d
d	37 ^d $\frac{5}{6}$.
t	18 ^d $\frac{1}{2}$.

On a commencé à mesurer les températures avec le plus grand soin ; une personne observait un seul thermomètre, et toutes étaient averties au même instant par celle qui observait le temps écoulé. On remarquait aussitôt la position du mercure dans le thermomètre, et l'on en tenait note.

La table suivante contient ces résultats.

TEMPS.	THERMO- MÈTRE <i>c.</i>	THERMO- MÈTRE <i>b.</i>	THERMO- MÈTRE <i>a.</i>	THERMO- MÈTRE <i>d.</i>	THERMO- MÈTRE <i>t.</i>	SOMME $\frac{1}{2}(a+c).$	SOMME $\frac{1}{2}(b+d).$	DIFFÉRENCE des demi- somm.
heures. minutes.								
7 39.	89 ^d $\frac{1}{2}$.	59.	28.	40 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$ un peu haut.	58,916.	49,833.	+ 9,083.
7 45.	75 $\frac{1}{2}$.	56 $\frac{1}{2}$.	30 $\frac{1}{2}$.	42 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$ <i>id.</i>	53,167.	49,417.	+ 3,750.
7 51.	66 $\frac{1}{2}$.	53 $\frac{1}{2}$.	32 $\frac{1}{2}$.	42 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$ <i>id.</i>	49,250.	47,833.	+ 1,417.
7 56.	60.	50 $\frac{1}{2}$.	33 $\frac{1}{2}$.	41 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$ <i>id.</i>	46,833.	46,167.	+ 0,666.
8 1.	55 $\frac{1}{2}$.	47 $\frac{1}{2}$.	34 $\frac{1}{2}$.	41 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	44,800.	44,483.	+ 0,317.
8 5.	51 $\frac{1}{2}$.	45 $\frac{1}{2}$.	34 $\frac{1}{2}$.	40 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	43,333.	43,067.	+ 0,266.
8 12.	47.	43.	35.	38 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	41,000.	40,967.	+ 0,033.
8 17.	43 $\frac{1}{2}$.	41.	34 $\frac{1}{2}$.	38.	18 $\frac{1}{2}$.	39,354.	39,500.	— 0,146.
8 21.	42 $\frac{1}{2}$.	39 $\frac{1}{2}$.	34 $\frac{1}{2}$.	37 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	38,500.	38,483.	+ 0,017.
8 25.	40 $\frac{1}{2}$.	37 $\frac{1}{2}$.	34 $\frac{1}{2}$.	36 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	37,375.	37,041.	+ 0,334.
8 27.	39 $\frac{1}{2}$.	37.	34.	35 $\frac{1}{2}$.	18 $\frac{1}{2}$.	36,850.	36,467.	+ 0,383.
8 34.	37 $\frac{1}{2}$.	36.	33 faible.	34 $\frac{1}{2}$.	19 faible.	35,167.	35,367.	— 0,200.
8 38.	36.	35.	32 $\frac{1}{2}$.	33 $\frac{1}{2}$.	19 un peu faible.	34,365.	34,300.	+ 0,065.
8 43.	34 $\frac{1}{2}$.	33 $\frac{1}{2}$.	32 $\frac{1}{2}$.	33 $\frac{1}{2}$.	19 <i>id.</i>	33,350.	33,500.	— 0,150.
8 oublié.	33 $\frac{1}{2}$.	33 $\frac{1}{2}$.	31 $\frac{1}{2}$.	32 $\frac{1}{2}$.	19 <i>id.</i>	32,791.	32,950.	— 0,159.
8 50.	33.	32 $\frac{1}{2}$.	31 $\frac{1}{2}$.	32.	19 <i>id.</i>	32,125.	32,200.	— 0,075.
8 53.	32.	31 $\frac{1}{2}$.	31 $\frac{1}{2}$.	31 $\frac{1}{2}$.	19 <i>id.</i>	31,533.	31,733.	— 0,200.
9.	30 $\frac{1}{2}$.	30 $\frac{1}{2}$.	30 $\frac{1}{2}$.	30 $\frac{1}{2}$ un peu fort.	19 <i>id.</i>	30,312.	30,500.	— 0,188.
9 24.	27 $\frac{1}{2}$.	27 $\frac{1}{2}$.	27 $\frac{1}{2}$.	27 $\frac{1}{2}$.	19 <i>id.</i>	27,666.	27,750.	— 0,084.
9 29.	27.	27 $\frac{1}{2}$.	27 $\frac{1}{2}$.	27 $\frac{1}{2}$.	19 <i>id.</i>	27,125.	27,291.	— 0,166.
9 34.	26 $\frac{1}{2}$.	26 $\frac{1}{2}$ un peu fort.	26 $\frac{1}{2}$.	26 $\frac{1}{2}$.	19 <i>id.</i>	26,625.	26,666.	— 0,041.

L'expérience a été terminée à 10^h 28' du soir.

Nous avons vu (art. 37) que la loi de la propagation de la chaleur dans une armille devient de plus en plus simple, à mesure que le refroidissement s'opère, et qu'après un certain temps écoulé la chaleur est distribuée symétriquement. Dans ce dernier état, qui dure jusqu'à la fin du refroidissement, la circonférence est divisée en deux parties inégalement échauffées. Tous les points d'une moitié de l'armille ont une température supérieure à la température moyenne, et tous les points de la moitié opposée ont des températures inférieures à cette valeur moyenne. La quantité de la différence est représentée par le sinus de l'arc compris depuis chaque point jusqu'à l'extrémité du diamètre mené par le point qui a la température moyenne. On avait pour but, dans l'expérience précédente, de connaître le moment où le solide commence à entrer dans l'état que nous venons de décrire. Comme la température moyenne équivaut, dans cet état, à la demi-somme des températures de deux points situés aux extrémités d'un même diamètre, et que par conséquent cette demi-somme est la même pour deux points quelconques, pourvu qu'ils soient opposés, on a choisi cette propriété comme l'indice de la disposition symétrique qu'il s'agit de rendre sensible. Tout se réduit donc à observer pour le même instant la valeur de la différence de la demi-somme des températures $a + c$, et la demi-somme des températures $b + d$, et à examiner au moyen des résultats précédents s'il arrive, après un certain temps, que ces températures deviennent et demeurent égales. Or les résultats des expériences sont à cet égard très-remarquables, et ne laissent aucun doute sur cette distribution régulière de la chaleur.

En effet, lorsqu'on a éloigné le foyer à 7^h 31', la demi-somme $\frac{1}{2} (a + c)$ valait environ 76^d $\frac{1}{3}$, et la demi-

somme $\frac{1}{2}(b+d)$ valait $45^{\text{d}} \frac{2}{3}$. Ces deux quantités, loin d'être égales, différaient de $30^{\text{d}} \frac{2}{3}$. A $7^{\text{h}} 34'$ la demi-somme $\frac{1}{2}(a+c)$ valait environ $68^{\text{d}} \frac{1}{6}$, et la demi-somme $\frac{1}{2}(b+d)$ valait environ $47^{\text{d}} \frac{1}{6}$: ainsi la différence était encore de 21^{d} . En continuant jusqu'à la fin de l'expérience cette comparaison des deux demi-sommes, il est facile de juger si elles tendent à devenir égales, et restent sensiblement dans cet état d'égalité ; ou si, au contraire, elles peuvent se séparer, et donner des différences croissantes de signe opposé.

On a marqué dans la table, pour chaque valeur du temps écoulé, la valeur correspondante de la demi-somme $\frac{1}{2}(a+c)$, celle de la demi-somme $\frac{1}{2}(b+d)$, et la différence des deux valeurs. On voit par cette table que la différence des demi-sommes, qui était d'abord $30^{\text{d}} 66$, a été réduite en $3'$ à 21^{d} ; elle est devenue 9^{d} pendant les $5'$ suivantes, et elle a ensuite continué à décroître : mais elle n'a pu acquérir aucune valeur négative de quelque étendue. Cette différence des demi-sommes a passé en $26'$ de la valeur de 30^{d} à celle d'un demi-degré environ ; elle a conservé des valeurs très-petites, qui se sont abaissées successivement au-dessous d'un tiers et d'un cinquième de degré. Il faut ajouter que les valeurs apparentes de cette différence résultent en majeure partie des erreurs presque inévitables des instrumens et des observations. D'ailleurs on a fait l'expérience dans l'air tranquille, au lieu de déterminer un courant d'air d'une vitesse uniforme ; il était facile de prévoir que l'omission de cette condition n'aurait point une influence considérable sur les résultats.

On a souvent répété des expériences de ce genre, en faisant varier toutes les circonstances, ou successivement, ou ensemble.

On a plusieurs fois employé six thermomètres dont trois étaient opposés à trois autres; alors on a comparé les trois demi-sommes, et l'on a toujours reconnu qu'elles tendaient rapidement à devenir égales, et qu'ensuite elles demeuraient dans cet état pendant toute la durée de l'expérience. On a échauffé l'anneau au moyen de deux foyers, et d'autres fois on a transporté le foyer en divers endroits, afin d'occasionner le plus d'inégalité possible dans la distribution de la chaleur. Enfin on a fait concourir le frottement à la production de la chaleur; et, de quelque manière que l'anneau ait été échauffé, on a toujours observé que les demi-sommes convergent rapidement vers une valeur commune, en sorte qu'on a reconnu par le fait l'impossibilité d'obtenir un résultat différent de celui que l'analyse nous a fait connaître. Au reste, l'observation de ces faits n'ajoute rien à la certitude des conséquences théoriques : elles dérivent nécessairement du principe de la communication de la chaleur; elles ont toute l'exactitude de ce principe, et seraient assujetties aux mêmes corrections, si des expériences ultérieures en faisaient connaître la nécessité.

103. On a exposé pendant 30' environ à l'action d'un foyer de chaleur une masse de fer de forme sphérique, et dont la surface avait été polie avec le plus grand soin : le diamètre de la sphère est d'environ 4 pouces (1); un thermomètre exactement construit pénétrait au-delà du centre de la sphère; le trou cylindrique qui recevait ce thermomètre était rempli de mercure.

L'expérience avait lieu dans l'air tranquille, au milieu d'une pièce assez vaste, entretenue à une température constante.

(1) Le diamètre de la sphère est de 0^m,1106; le diamètre du trou cylindrique est de 0^m,015; la profondeur de ce trou est de 0^m,080; le poids du solide, sans celui du mercure, est de 5310^{gr},7.

Le thermomètre libre qui indiquait la température de l'air marquait $12^{\text{d}} \frac{1}{2}$.

La température de la sphère s'est élevée au-delà de 100^{d} (division octogésimale). Alors on l'a séparée du foyer et on l'a exposée isolément à l'air; elle était suspendue par deux cordons de soie, qui passaient dans deux anneaux extrêmement petits fixés à la surface. On a essuyé la surface, afin de faire disparaître les taches que la flamme aurait pu laisser. Le thermomètre s'est abaissé successivement. La table suivante donne, 1.° les valeurs du temps, 2.° les élévations correspondantes du thermomètre de la sphère depuis 63^{d} jusqu'à 43^{d} , 3.° les élévations du thermomètre libre.

Valeurs du temps t .	Différence des temps.	Valeur de z , tem- pérature de la sphère. Le thermomètre marque	Valeur de a , tem- pérature de la chambre. Le thermomètre marque	Valeur de y , éléva- tion au-dessus de la température de l'air.	Valeur de α dans l'équation $y = A \alpha^t$.
$8^{\text{h}} 41'.$		$63^{\text{d}}.$	$12^{\text{d}} \frac{1}{2}.$	$50,5.$	
	$17' \frac{1}{2}.$				$0,99406.$
$8^{\text{h}} 58' \frac{1}{2}.$		$58^{\text{d}}.$	$12^{\text{d}} \frac{1}{2}.$	$45,5.$	
	$20'.$				$0,99420.$
$9^{\text{h}} 18' \frac{1}{2}.$		$53^{\text{d}}.$	$12^{\text{d}} \frac{1}{2}.$	$40,5.$	
	$22' \frac{1}{3}.$				$0,99416.$
$9^{\text{h}} 40' \frac{5}{6}.$		$48^{\text{d}}.$	$12^{\text{d}} \frac{1}{2}.$	$35,5.$	
	$26' \frac{1}{2}.$				$0,99422.$
$10^{\text{h}} 7' \frac{1}{3}.$		$43^{\text{d}}.$	$12^{\text{d}} \frac{1}{2}.$	$30,5.$	

En résolvant la question de la propagation de la chaleur dans une sphère, nous avons remarqué que les températures se rapprochent continuellement du système durable dans lequel elles décroissent en même temps, sans que leurs rapports soient changés (art. 45 et 47). Alors ces températures varient depuis le centre jusqu'à la surface, de même que le rapport du sinus à l'arc varie depuis une extrémité de la demi-circonférence jusqu'à l'extrémité d'un certain arc moindre que

cette demi-circonférence. Chacune des températures en particulier, et par conséquent la température moyenne, décroît comme l'ordonnée d'une logarithmique dont le temps est l'abscisse. On peut reconnaître, au moyen de l'observation, le moment où cette distribution régulière de la chaleur est établie. En effet, il suffit d'examiner si le mouvement du thermomètre peut être représenté par une logarithmique; car cette dernière propriété n'appartient qu'à l'état régulier dont il s'agit. Soient z_1 et z_2 deux températures indiquées par le thermomètre de la sphère et correspondantes aux temps t_1 et t_2 ; soient a la température constante de l'air, et y l'élévation $z - a$. Si la valeur de y est donnée par l'équation $y = A a^t$, A étant une quantité constante et a une fraction, on aura $y_1 = A a^{t_1}$ et $y_2 = A a^{t_2}$: d'où l'on tire $\log a = \frac{\log y_1 - \log y_2}{t_2 - t_1}$. En prenant les deux températures 63^d et 58^d qui donnent $50,5$ et $45,5$ pour les deux valeurs y_1 et y_2 , on trouve pour la fraction a , $0,99406$.

Si l'on fait le même calcul pour l'intervalle suivant, c'est-à-dire en prenant $y_1 = 45,5$, $y_2 = 40,5$, et $t_2 - t_1 = 20'$, on trouve une seconde valeur de a . Le troisième intervalle donne $a = 0,99416$; le quatrième, $a = 0,99422$. On a rapporté dans la table précédente ces différentes valeurs de a .

On voit par ces résultats que si l'on considère deux élévations consécutives, par exemple $50^d \frac{1}{2}$ et $45^d \frac{1}{2}$, comme les deux termes extrêmes d'une progression géométrique, et que l'on insère entre eux un nombre de moyens proportionnels géométriques égal au nombre de minutes écoulées moins un, on trouve pour la raison de la progression une fraction a qui diffère très-peu de celle qu'on aurait trouvée pour l'intervalle suivant, formé des élévations $45^d \frac{1}{2}$ et $40^d \frac{1}{2}$. Le mouvement du thermomètre peut donc sensiblement être représenté par une courbe logarithmique. En effet, si l'on

suppose dans l'équation $y = A a^t$, $A = 50,406$ et $a = 0,99415$, on aura les valeurs suivantes, qui diffèrent très-peu de celles que l'on a observées.

Valeurs observées.	Valeurs déduites de l'équation.	Différences.
50,5.	50,406.	0,094.
45,5.	45,500.	0,000.
40,5.	40,466.	0,034.
35,5.	35,500.	0,000.
30,5.	30,352.	0,148.

Le refroidissement depuis 63^d jusqu'à 43^d a duré plus de $86'$, et dans cet intervalle le mouvement du thermomètre est exprimé par l'équation $y = A a^t$, à moins d'un sixième de degré près, erreur qui n'est pas la deux-centième partie de la température observée.

Au reste, il y a diverses circonstances qui troublent ici le mouvement de la chaleur et doivent altérer un peu l'exactitude des résultats. La partie de la masse qui est formée du mercure et du thermomètre est dans un état bien différent de celui que la théorie considère, et le thermomètre n'indique pas exactement la température moyenne du solide; mais la cause qui influe le plus sur les résultats, est la diminution continuelle de la vitesse de l'air. Ses molécules qui s'échauffent à la surface de la sphère sont emportées vers le haut par un courant dont la vitesse se ralentit à mesure que le corps devient plus froid. Or il y a une partie de la chaleur perdue par la surface qui dépend de la vitesse du courant; par conséquent le refroidissement devient moins prompt, et la fraction a par laquelle on doit multiplier la température pour connaître ce qu'elle devient après une minute, acquiert des valeurs de plus en plus grandes. Cet effet s'est manifesté dans toutes nos observations; mais il est peu sensible dans celle-ci, parce que l'on s'est borné à un intervalle de 20^d . La loi

du refroidissement dans un air tranquille diffère donc un peu de celle qu'on observerait si le corps était exposé à un courant d'air invariable. Il serait facile de déterminer cette première loi avec une approximation suffisante, et l'on en conclurait les différences qui existent entre les résultats de la première hypothèse et ceux de la seconde; mais nous ne nous sommes point proposé de traiter cette question, qui se rapporte à la propagation de la chaleur dans les fluides.

Indépendamment de l'expérience précédente, on en a fait plusieurs du même genre sur des sphères de diverses dimensions. Lorsqu'on a commencé ces observations, on prenait soin d'échauffer les solides uniformément, en les retenant dans un bain de mercure entretenu à une température permanente. Après que l'immersion avait duré un temps assez considérable, et que le thermomètre plongé dans la masse indiquait constamment la température requise, on retirait ce solide, et on le suspendait au milieu de l'air plus froid, afin d'observer les abaissemens successifs du thermomètre. On a toujours remarqué que la valeur de la fraction α augmente, quoique très-lentement, à mesure que la durée du refroidissement augmente. Cette valeur peut être regardée comme constante, lorsque la différence des deux températures extrêmes n'est pas considérable. On a plusieurs fois, dans nos expériences, observé les abaissemens du thermomètre de degré en degré, depuis 100^{d} jusqu'à 12^{d} ou 15^{d} . On est parvenu dans tous les cas à des résultats semblables à ceux que l'on vient d'exposer. On a enfoncé les sphères dans un liquide entretenu à une température constante, ou on les a entourées de sable ou de limaille continuellement échauffés. On a placé au-dessous une lampe allumée que l'on retirait ensuite. On n'a point remarqué dans les résultats de différence qui pût être attribuée à la manière dont le solide avait été échauffé. Il paraît que la diffusion de la chaleur dans la

masse s'opère assez facilement, et que, dans une sphère de dimensions médiocres, les températures arrivent bientôt à cet état où elles sont représentées par les quotiens du sinus par l'arc. On peut dans ces expériences, et sans craindre d'altérer la précision des résultats, suspendre les corps dans l'air, et les échauffer au moyen d'une ou de plusieurs lampes d'Argent; on retire ensuite les foyers, et l'on attend que le refroidissement ait duré quelque temps avant d'observer les abaissens du thermomètre. Nous avons fait aussi d'autres expériences afin de connaître les effets de la chaleur dans des solides de diverses formes et dimensions, dans différens liquides, dans les fluides élastiques et dans les vides : mais ces observations sont imparfaites et mériteraient peu l'attention du lecteur; elles n'ont point d'ailleurs un rapport direct avec la matière que nous avons traitée dans ces mémoires. On rapportera seulement deux observations faites avec beaucoup de soin sur une sphère et sur un cube de fer.

104. On a placé dans l'air, entretenu à une température constante, une sphère solide de fer d'environ deux pouces de diamètre (1); la surface était parfaitement polie, et l'on y avait fixé deux anneaux très-petits, où l'on passait deux cordons destinés à suspendre la masse. La sphère est percée d'un trou cylindrique où l'on mettait un thermomètre. Le centre du réservoir coïncide avec le centre de la sphère, et l'on remplissait le trou avec du mercure. On a placé sous la sphère une lampe allumée. Le thermomètre s'est élevé à plus de 103^{d} ; on a retiré le foyer, et l'on a observé, assez long-temps après, les températures suivantes :

(1) Le diamètre de la sphère est de $0^{\text{m}},0552$; le diamètre du trou cylindrique est de $0^{\text{m}},015$; la profondeur de ce trou est de $0^{\text{m}},038$; le poids de la sphère, sans celui du mercure, est de $653^{\text{gr}},7$.

A 6^h 34' le thermomètre a passé à 63^d.

A 7^h 7' 40" le thermomètre a passé à . . . 43^d.

L'expérience a eu lieu dans l'air tranquille. Un poêle échauffait une pièce voisine, et l'on entr'ouvrait, s'il était nécessaire, la porte de communication, afin de maintenir la température de l'appartement, qui était de 12^d $\frac{3}{16}$.

On a exposé de la même manière à l'action du foyer, et dans des circonstances semblables, une masse cubique de fer dont la surface avait été exactement polie; le côté du cube est d'environ deux pouces (1). Le thermomètre dont on s'est servi pour la sphère a été placé dans le cube, au milieu du trou cylindrique qui pénétrait un peu au-delà du centre et que l'on a rempli avec du mercure; le thermomètre s'est élevé à 80^d (une plus grande élévation ne changerait pas les résultats). Alors on a éloigné le foyer, et l'on a observé, quelque temps après, les températures suivantes :

A 8^h 17' 36" le thermomètre a passé à . . . 63^d.

A 8^h 56' 40" le thermomètre a passé à . . . 43^d.

Le thermomètre placé dans l'air marquait 12^d $\frac{3}{8}$.

Ainsi la température s'est abaissée de 63^d à 43^d en 33' 40" pour la sphère, et de 63^d à 43^d en 39' 4" pour le cube, dont le côté est sensiblement égal au diamètre de la sphère.

En comparant ces résultats, il est nécessaire de remarquer, comme on l'a fait précédemment (art. 101), que plusieurs circonstances concourent à en altérer l'exactitude. Il faut observer sur-tout que la partie du solide qui est formée de mercure, se trouve dans un état très-différent de celui que la théorie suppose; et les dimensions des trous cylindriques sont telles dans les différens solides, que la cause précédente a

(1) Le côté du cube est de 0^m,05535; le diamètre du trou cylindrique est de 0^m,015; la profondeur de ce trou est de 0^m,042; le poids du cube, sans celui du mercure, est de 1245^{gr}.

d'autant plus d'effet que les corps ont de moindres dimensions : cette cause tend à augmenter le rapport des durées du refroidissement.

105. Nous terminons ici toutes nos recherches sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. La table placée à la fin de cet ouvrage indique l'ensemble et les résultats généraux de notre théorie. Aucun ne nous paraît plus remarquable que cette déposition régulière que la chaleur affecte toujours dans l'intérieur des solides, et que l'analyse mathématique, devançant toutes les observations, nous fait connaître aujourd'hui. Pour représenter généralement cet effet, il faut concevoir que tous les points d'un corps d'une figure donnée, par exemple d'une sphère ou d'un cube, ont d'abord reçu des températures différentes, qui diminuent toutes en même temps, lorsque le corps est placé dans un milieu plus froid. Or le système des températures initiales peut être tel, que les rapports établis primitivement entre elles se conservent sans aucune altération pendant toute la durée du refroidissement. Cet état singulier, qui jouit de la propriété de subsister lorsqu'il est formé, peut être comparé à la figure que prend une corde sonore lorsqu'elle fait entendre le son principal. Le même état est susceptible aussi de diverses formes, analogues à celles qui répondent dans la corde élastique aux sons subordonnés. Il y a donc pour chaque solide une infinité de modes simples suivant lesquels la chaleur peut se propager et se dissiper, sans que la loi de la distribution initiale éprouve aucun changement. Si l'on formait dans le solide un seul de ces états simples, toutes les températures s'abaisseraient en même temps, en conservant leurs premiers rapports, et chacune d'elles diminuerait comme l'ordonnée d'une même logarithmique, le temps étant pris pour abscisse.

De quelque manière que les différens points d'un corps

aient été échauffés, le système initial et arbitraire des températures se décompose en plusieurs états simples et durables, pareils à ceux que nous venons de décrire. Chacun de ces états subsiste indépendamment de tous les autres, et n'éprouve d'autres changemens que ceux qu'il éprouverait s'il était seul. La décomposition dont il s'agit n'est point un résultat purement rationnel et analytique, elle a lieu effectivement et résulte des propriétés physiques de la chaleur. En effet, la vitesse avec laquelle les températures décroissent dans chacun des systèmes simples n'est pas la même pour les différens systèmes; elle est extrêmement grande pour les états subordonnés. Il arrive de là que ces derniers états n'ont une influence sensible que pendant un certain intervalle de temps: ils finissent en quelque sorte par disparaître, et s'effacent pour ne laisser subsister visiblement que l'état principal. On en tire cette conséquence, que, de quelque manière que la chaleur initiale ait été répartie entre les points du solide, elle ne tarde point à se distribuer d'elle-même suivant un ordre constant. Le système des températures passe dans tous les cas possibles à un même état déterminé par la figure du solide et indépendant du système initial: on peut connaître par l'observation le moment où cet état principal est formé; car, lorsqu'il a lieu, la température d'un point quelconque décroît comme les puissances successives d'une même fraction. Il suffit donc de mesurer la température variable d'un point du solide, afin de distinguer le moment où la loi précédente commence d'être observée.

La propriété que la chaleur a d'affecter dans les solides une distribution régulière indépendante des causes extérieures, se manifeste encore lorsque les températures sont devenues permanentes. Ainsi, lorsqu'un cylindre ou un prisme métallique d'une longueur considérable est exposé par une extrémité à l'action durable et uniforme d'un foyer de chaleur,

chaque point du solide acquiert une température fixe. La loi suivant laquelle la chaleur se distribue est d'autant plus simple que les points observés sont plus éloignés de l'extrémité échauffée. L'état du solide, dans la partie qui est soumise à l'influence prochaine du foyer, se compose de plusieurs états particuliers dont chacun peut subsister indépendamment des autres; mais les températures prises à une certaine distance de l'origine jusqu'à l'extrémité opposée ne forment plus qu'un système unique et principal, qui serait encore le même si l'on changeait d'une manière quelconque l'action permanente du foyer.

Les phénomènes dynamiques présentent aussi des propriétés analogues, telles que l'isochronisme des dernières oscillations ou la résonnance multiple des corps sonores. Ces résultats, que des expériences journalières avaient rendus manifestes, ont été ensuite expliqués par le calcul. Ceux qui dépendent du mouvement de la chaleur ne peuvent être constatés que par des observations plus attentives; mais l'analyse mathématique, empruntant la connaissance d'un petit nombre de faits généraux, supplée à nos sens et nous rend en quelque sorte témoins de tous les changemens qui s'accomplissent dans l'intérieur des corps. Elle nous dévoile cette composition harmonique des mouvemens simples auxquels la chaleur est assujettie, soit qu'elle se propage uniformément pour entretenir des températures fixes, soit qu'elle tende et se dispose par degrés insensibles à ce dernier état.

Des observations plus précises et plus variées feront connaître par la suite si les effets de la chaleur sont modifiés par des causes que l'on n'a point aperçues jusqu'ici, et la théorie acquerra une nouvelle perfection par la comparaison continue de ses résultats avec ceux des expériences; elle expliquera des phénomènes importans que l'on ne pouvait point encore soumettre au calcul; elle apprendra à déterminer les

effets variables des rayons solaires, les changemens que subit la température dans l'intérieur du globe terrestre, aux sommets des montagnes, à différentes distances de l'équateur, et les grands mouvemens que les variations de la chaleur occasionnent dans l'océan et dans l'atmosphère ; elle servira à mesurer la conducibilité intérieure ou extérieure des différens corps et leur capacité de chaleur, à distinguer toutes les causes qui modifient l'émission de la chaleur à la surface des solides et à perfectionner les instrumens thermométriques. Cette théorie excitera dans tous les temps l'attention des géomètres, elle les intéressera par les difficultés d'analyse qu'elle présente et par la grandeur et l'utilité qui lui sont propres. Aucun sujet n'a des rapports plus étendus avec l'étude de la nature et les progrès de l'industrie ; car l'action de la chaleur est toujours présente, elle pénètre les corps et les espaces, elle influe sur les procédés de tous les arts et concourt à tous les phénomènes de l'univers.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LA SUITE DU MÉMOIRE INTITULÉ :

THÉORIE

DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR

DANS LES CORPS SOLIDES.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
-----------------------------	--------------------------

- | | | |
|-----|------|---|
| 80. | 153. | XII. <i>Des Températures terrestres, et du Mouvement de la Chaleur dans l'intérieur d'une sphère solide dont la surface est assujettie à des changemens périodiques de température.</i> |
|-----|------|---|

REMARQUES générales sur la question des températures terrestres.

- | | | |
|-----|------|--|
| 81. | 155. | On suppose que tous les points de la surface d'une sphère d'un très-grand diamètre ont une température commune v , qui est une fonction périodique du temps écoulé. Cette fonction $\phi(t)$ ne change point de valeur lorsqu'on écrit $t + \theta$ au lieu de t . θ est une constante égale à la durée de la période. Quelles que soient les températures primitives des molécules du solide, elles s'approchent de plus en plus d'un certain état périodique qui ne dépend que des variations auxquelles la surface est assujettie. Cet état est représenté par l'équation suivante : |
|-----|------|--|

$$v = \frac{1}{\theta} \int \phi t. dt + \Sigma \left\{ \frac{2}{\theta} e^{-u} \sqrt{\frac{\pi}{i k \theta}} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{\theta} t - u \sqrt{\frac{i\pi}{k\theta}} \right) \int \phi t. \cos \left(\frac{2\pi}{\theta} t \right) dt \right. \right. \\ \left. \left. \sin \left(\frac{2\pi}{\theta} t - u \sqrt{\frac{i\pi}{k\theta}} \right) \int \phi t. \cos \left(\frac{2\pi}{\theta} t \right) dt \right] \right\}$$

v est la température que doit prendre après le temps t la couche sphérique qui est placée au-dessous de la surface à la profondeur u .
Il faut développer le signe Σ en mettant au lieu de i les valeurs

160. successives 1, 2, 3, 4, i

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
82.	160. Lorsqu'on donne à la variable u une valeur un peu considérable, les termes placés sous le signe Σ s'évanouissent presque entièrement, d'où il suit que les variations périodiques de la surface deviennent insensibles à une certaine profondeur.
83.	161. La température permanente des lieux profonds étant exprimée par le premier terme de la valeur de v , est égale à la valeur moyenne de toutes les températures que l'on observerait à la surface pendant la durée θ de la période.
84.	161. Lorsque la profondeur est telle, que les variations périodiques ne sont pas entièrement insensibles, mais seulement ont de petites valeurs, ces variations $v - \frac{1}{\theta} \int \phi(t) dt$, ou w , sont exprimées par le premier des termes qui entrent sous le signe Σ . Cette différence w entre la température d'un point intérieur et la température moyenne varie avec le temps, et comme le sinus du temps qui s'est écoulé depuis l'instant où elle était nulle. Elle reprend toutes ses premières valeurs pendant la durée θ de la période suivante. Le <i>maximum</i> de la différence w n'est pas le même pour différentes profondeurs; il décroît en progression géométrique à mesure que la profondeur augmente de quantités égales. Les différents points d'une même verticale ne parviennent point dans le même temps à la température moyenne, et cette dernière température passe d'un point à un autre avec une vitesse uniforme. La durée θ de la période et la conducibilité du solide influent beaucoup sur la profondeur à laquelle les variations deviennent insensibles, et sur la distance des deux points d'une même verticale qui atteignent en même temps la température moyenne.
85.	164. On applique ces résultats à une masse sphérique homogène de fer, dont la surface serait assujettie à des variations diurnes et annuelles de température. Ayant déterminé, par les expériences rapportées dans ce mémoire, la valeur approchée du nombre K , on trouve que les variations diurnes sont presque nulles à 2 ^m ,3, et que les variations annuelles sont insensibles à 60 mètres environ. La température moyenne descend dans l'intérieur du globe avec une vitesse d'environ 30 mètres en six mois.
	167. On applique la solution générale au cas où les températures de la surface varieraient comme les sinus des temps écoulés. La durée θ de la période est partagée en deux saisons égales. Pendant la première le globe s'échauffe, le foyer lui communiquant une nouvelle quantité de chaleur; pendant la seconde le

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
-----------------------------	--------------------------

86. solide perd cette même chaleur qu'il avait acquise et la rend à l'espace extérieur.

Le globe commence à s'échauffer un huitième d'année après que la température de la surface a passé au-dessus de sa valeur moyenne; il commence à se refroidir six mois après. On peut déterminer toute la quantité de chaleur qui, pendant la saison de l'échauffement, pénètre dans le solide en traversant une portion déterminée de la surface.

Dans le climat où la température annuelle s'élève de 8° (octogésim.) au-dessus de la valeur moyenne, la chaleur totale qui pénètre pendant le cours d'une année une surface d'un mètre carré, serait pour un globe de fer équivalente à 2856, c'est-à-dire qu'elle pourrait fondre 2856 kilogrammes de glace.

171. La température fixe des lieux profonds n'est point la même dans tous les climats, et elle diminue à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur. Si l'on fait abstraction de l'enveloppe sphérique dont les points sont assujettis à des variations périodiques de température, on peut considérer le globe terrestre comme une sphère solide dont les points situés à la surface sont entretenus à des températures fixes, mais qui diffèrent d'un point à un autre. On peut déterminer par le calcul l'état des molécules intérieures.

x désigne la distance d'un point du solide au plan de l'équateur, et y la distance de ce point à l'axe de l'équateur. X et Y sont les valeurs de x et de y pour les points de la surface. Des causes extérieures quelconques retiennent tous les points de la surface situés sur un même parallèle, à une température commune et fixe $F(X)$; il en est de même de chacun des parallèles, en sorte que la loi suivant laquelle les températures diminuent, depuis le pôle jusqu'à l'équateur, est représentée par la fonction connue $F(X)$; quelles que soient les températures initiales des points intérieurs, elles changent continuellement et elles s'approchent de plus en plus d'un état final permanent.

Cet état est exprimé par l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dv}{dy} = 0.$$

v est la température fixe du point dont les coordonnées sont x et y .

On peut assigner pour une valeur particulière de v la fonction $\cos x \int e^{y \cos q} dq$, ou

$$\cos x \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} + \&c. \right).$$

Si donc on donne aux différens points d'une sphère solide les

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
-----------------------------	--------------------------

	températures exprimées par cette fonction, et si l'on maintient ensuite dans leur état actuel les températures de la surface, il ne
175.	pourra y avoir aucun changement dans l'intérieur de la sphère.
88.	175. Cette solution, quoique particulière, fait connaître comment la chaleur pénètre par les régions équatoriales, et s'avance de plus en plus dans l'intérieur du globe pour remplacer celle qui
	179. se détourne et se dissipe vers les pôles.
89.	179. XIII. <i>Des Lois mathématiques de l'Équilibre de la Chaleur rayonnante.</i>
	182. Principe général de l'équilibre des températures.
90.	182. Mesure de l'intensité des rayons de chaleur.
	183.
	183. Un plan circulaire étant maintenu à la température a , on place en un point de la perpendiculaire élevée par le centre du cercle sur son plan un disque infiniment petit, dont le rayon est μ et dont le plan est parallèle à celui du cercle. La quantité de chaleur que le plan envoie sur le disque est :
	$a h. \pi. \mu^2 \frac{\int_1 dz Fz}{\int_2 dz Fz}.$
	h est la conducibilité de la surface échauffée ; z est le sinus de l'angle φ que fait avec le plan la direction d'un rayon qui, ayant son centre sur ce plan, embrasse le disque infiniment petit ; Fz ou $F(\sin \varphi)$ représente la loi indéterminée suivant laquelle l'intensité varie avec l'angle φ . Z ou $\sin \Phi$ représente la valeur extrême de z , ou celle qui répond à un point de la circonférence qui termine le plan. L'intégrale $\int_1$ doit être prise depuis $z = Z$ jusqu'à $z = 1$, et l'intégrale $\int_2$ doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$.
91.	Si l'intensité des rayons est constante, quel que soit l'angle φ , l'action du plan sur le disque est $a h \pi \mu^2 \sin \Psi$; en désignant par Ψ la moitié de l'angle dont le sommet est au centre du plan, et dont les côtés comprennent le disque.
	Si l'intensité décroît comme le sinus de l'angle d'émission, c'est-à-dire si $F(\sin \varphi) = \sin \varphi$, l'action du plan sur le disque est $a h \pi \mu^2 \sin^2 \Psi$.
	Si le plan circulaire a un rayon infini, l'action totale du plan sur le disque est toujours $a h \pi \mu^2$; cela a lieu quelle que soit la distance du disque à la surface échauffée, et quelle que soit la fonction de $\sin \varphi$ qui exprime la loi des intensités.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
-----------------------------	--------------------------

- Si en un point quelconque de l'espace compris entre deux surfaces planes, parallèles et infinies, maintenues à la température a , on place un disque infiniment petit parallèlement aux plans, il acquerra et conservera une température a égale à celle des deux surfaces. Ce résultat a lieu, quelle que soit la fonction $F(\sin \phi)$.
- 186.
187. Si l'on place une molécule sphérique, dont le rayon est ρ , au centre d'une enceinte sphérique entretenue par une cause quelconque à la température a , l'action de la surface intérieure de la sphère sur la molécule sera $2 a \pi h \rho^2 \cdot \frac{F(1)}{\int dz F(z)}$.
92. L'intégrale est prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$.
Si l'intensité des rayons était la même pour tous les angles ϕ , la molécule acquerrait la moitié seulement de la température de l'enceinte.
Si l'intensité des rayons décroît proportionnellement à $\sin \phi$, la
188. molécule acquerra une température égale à celle de l'enceinte.
188. L'action d'un plan circulaire sur une molécule sphérique placée
- $$\int_1 \frac{dz \cdot Fz}{z}$$
- en un point de l'axe du plan est $a h \pi \rho^2 \frac{\int_1 \frac{dz \cdot Fz}{z}}{\int_2 dz \cdot Fz}$. La première intégrale est prise de $z=Z$, valeur extrême, jusqu'à $z=1$; et la seconde, de $z=0$ à $z=1$.
- Si l'intensité des rayons émis est invariable, l'action de la surface échauffée est $a h \pi \rho^2 \cdot \log \left(\frac{1}{\sin \Phi} \right)$, Φ étant la valeur
93. extrême de ϕ . La molécule pourrait acquérir, en vertu de l'action du plan, une température infiniment plus grande que a .
Si l'intensité des rayons émis est proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, l'action du plan sur la molécule est
- $$2 a \pi \rho^2 h (1 - \sin \Phi);$$
- et si, dans ce même cas, on place une molécule sphérique en un point quelconque de l'espace compris entre les deux surfaces échauffées, cette molécule acquerra et conservera la température a
190. des deux surfaces.
190. Si l'on place une molécule sphérique en un point quelconque de l'axe d'une enveloppe cylindrique entretenue à la température a , on déterminera facilement l'action de cette enveloppe sur la molécule.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
-----------------------------	--------------------------

94. Si l'intensité des rayons émis est invariable, l'action de la surface sur la molécule sera $a \pi \rho^2 h (\Psi + \Psi')$. Ψ et Ψ' sont les angles que font avec la perpendiculaire abaissée de la molécule sur la surface, des lignes qui, partant de cette molécule, aboutissent aux deux extrémités de la surface. Dans ce cas, la longueur de l'enveloppe étant infinie, la molécule acquerrait une température moindre que a dans la raison de π à 4.

Si l'intensité des rayons émis décroît comme le sinus de l'angle d'émission, l'action de l'enveloppe sur la molécule est

$$a \pi \rho^2 h (2 \sin \Psi + 2 \sin \Psi');$$

et si la longueur du cylindre est infinie, la molécule acquiert et
192. conserve la température a de la surface échauffée.

95. 192. Si l'on place une molécule sphérique en un point quelconque de l'axe d'une enveloppe cylindrique fermée par deux plans circulaires, et que cette enceinte soit maintenue par une cause extérieure quelconque à la température a , il est facile de connaître la température que la molécule doit acquérir, soit que l'intensité des rayons ne dépende point de l'angle d'émission, soit qu'elle varie proportionnellement au sinus de cet angle. Dans le premier cas, la température acquise dépend de la place qu'occupe la molécule, et elle peut être ou moindre ou infiniment plus grande que a ; dans le second cas, la température acquise est toujours égale à celle de la surface échauffée, en quelque lieu
193. que l'on place la molécule.

193. On suppose qu'une enceinte d'une figure quelconque terminant de toutes parts un espace vide d'air soit maintenue à une température constante a , et que l'on mette en un point de cet espace un corps d'une figure quelconque. On prouve que ce corps doit acquérir et conserver la même température que l'enceinte, si l'intensité des rayons émis décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission. Dans ce cas, la partie infiniment petite s de la surface du corps reçoit d'une portion infiniment petite σ de l'enceinte autant de chaleur qu'elle lui en envoie.

96. Cette égalité des actions réciproques qui constitue l'équilibre n'a lieu qu'autant que l'intensité décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission; elle ne peut résulter d'aucune autre loi.

Ce résultat de l'action mutuelle de deux surfaces infiniment petites s et σ , dont l'une a la température a et l'autre la température b , est $\frac{s \sin p (a - b) h \sigma \sin \phi}{y^2}$; y est la distance des deux éléments s et σ ; p est l'angle que fait la distance y avec s ; ϕ est

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
	l'angle que fait y avec σ ; h est la conducibilité des deux surfaces. Cette proposition est indépendante de toute hypothèse physique sur la nature de la chaleur; elle contient la théorie mathématique de l'équilibre de la chaleur rayonnante.
196.	Lorsque l'équilibre des températures est formé, on peut concevoir qu'une portion infiniment petite quelconque de la surface extérieure du corps ou de l'enceinte est le centre d'un hémisphère continuellement rempli de rayons de chaleur; l'intensité du rayon est proportionnelle au sinus de l'angle que fait sa direction avec la surface dont il s'éloigne. A chacun des rayons émis correspond un rayon incident qui a la même intensité que lui, et qui, suivant une route opposée, pénètre la surface dans le point même dont s'éloigne le rayon émis.
97.	
197.	Cet équilibre s'établit de la même manière lorsque les corps changent de lieu; il ne dépend ni de la forme ni du nombre de ces corps.
98.	
198.	Toute modification de la surface des corps qui augmente la faculté de réfléchir une partie des rayons incidents, diminue aussi, et dans le même rapport, la faculté de projeter dans l'espace la chaleur intérieure. Cette relation est connue des physiciens, et elle est prouvée par l'expérience. Il en résulte que l'équilibre de la chaleur rayonnante subsiste dans tous les corps, de la même manière que s'ils étaient tous privés de la propriété de réfléchir les rayons de chaleur à leur surface.
99.	
204.	Examen de la cause qui rend l'intensité des rayons émis d'autant moindre que leur direction est plus oblique. La loi mathématique du décroissement de cette intensité est indiquée par des expériences déjà publiées: elle est une conséquence nécessaire du mode de propagation de la chaleur à travers la surface des corps solides.
100.	
213.	
	XIV. <i>Comparaison des Résultats de la Théorie avec ceux de diverses Expériences.</i>
	On a mesuré avec beaucoup de soin les températures stationnaires d'un anneau de fer très-poli exposé à l'action constante d'un ou de plusieurs foyers de chaleur. La circonférence était divisée en plusieurs parties égales, et l'on observait les températures fixes de plusieurs points de division. On a toujours remarqué entre ces températures les relations que la théorie avait fait connaître.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
-----------------------------	--------------------------

101.

Ainsi l'on a mesuré les élévations de trois thermomètres consécutifs; et en divisant la somme des élévations du premier et du troisième par celle du second, on a trouvé pour quotient un nombre très-voisin de 2, 3. On a mesuré onze valeurs de ce rapport prises dans des circonstances très-différentes: trois thermomètres consécutifs quelconques donnent toujours ce même quotient, et il ne dépend ni du nombre des foyers, ni de leur intensité, ni du lieu où ils sont placés. Chacune des onze valeurs observées ne s'éloigne pas de la valeur moyenne de la quatre-vingt-dixième partie de cette valeur; et si l'on n'emploie que les expériences faites le même jour, cette différence est moindre que la deux-centième partie de la valeur cherchée.

221.

On a observé les températures variables de ce même anneau pendant qu'il se refroidissait librement dans l'air. Les thermomètres *A* et *A'* étaient placés aux extrémités d'un même diamètre; deux thermomètres *B* et *B'*, et deux autres *C* et *C'*, étaient aussi placés respectivement aux deux extrémités d'un diamètre. On mesurait dans le même instant les trois élévations *a* et *a'*, *b* et *b'*, *c* et *c'* des six thermomètres, et l'on comparait les trois demi-sommes $\frac{1}{2}(a+a')$, $\frac{1}{2}(b+b')$, $\frac{1}{2}(c+c')$.

102.

On a toujours remarqué que ces demi-sommes, qui étaient d'abord très-inégales, tendaient rapidement à devenir les mêmes et persistaient ensuite dans cet état.

Quoiqu'on ait fait un grand nombre d'expériences de ce genre, on n'a jamais observé que les demi-sommes, après s'être approchées d'une valeur moyenne, s'en écartassent de plus d'un sixième de degré de l'échelle octogésimale. On a donc reconnu par le fait l'impossibilité d'obtenir un résultat différent de celui que la théorie indique.

226.

On a observé la température décroissante d'une masse sphérique de fer poli qui, après avoir été échauffée, était exposée isolément à l'air froid. Il s'est écoulé plus de 86' pendant que la température s'est abaissée de 63^d. octog. à 43^d, et l'on a mesuré les températures intermédiaires.

103.

Pendant toute la durée du refroidissement, l'état du solide a été exactement représenté par l'équation exponentielle que donne la théorie. En comparant les températures observées avec celles que l'on aurait pu déduire du calcul, on n'a trouvé que des différences moindres qu'un sixième de degré. Plusieurs expériences de ce genre ont donné des résultats également conformes à ceux de la théorie.

231.

On a rapporté aussi deux expériences faites avec beaucoup de soin, pour comparer les durées du refroidissement dans une

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.
104.	sphère solide de fer poli et un cube de même matière dont le côté est égal au rayon de la sphère. Ces diverses expériences ont eu pour but de vérifier les résultats les plus remarquables de la théorie, et de fournir pour une substance déterminée (le fer) les valeurs numériques des coefficients h et K qui mesurent la conducibilité extérieure et la conducibilité propre de cette substance.
105.	233. } Remarques générales. 236. }

NOTA.

CETTE table termine le Mémoire de M. Fourier sur la théorie de la chaleur. Une première partie de la table, celle qui se rapporte à la partie principale du Mémoire, où l'auteur traite des lois générales de la distribution de la chaleur, a été insérée dans le volume précédent.

Ces deux parties de l'ouvrage de M. Fourier, et l'une et l'autre tables, sont ici publiées sans aucun changement ni addition quelconque. Le texte est littéralement conforme au manuscrit déposé, qui fait partie des archives de l'Institut, afin qu'il puisse toujours être représenté.

Les premières recherches analytiques de l'auteur sur la communication de la chaleur ont eu pour objet la distribution entre des masses disjointes : on les a conservées dans la première partie du Mémoire.

Les questions relatives aux corps continus ont été résolues par l'auteur plusieurs années après. Il a exposé pour la première fois cette théorie dans un ouvrage manuscrit remis à l'Institut de France à la fin de l'année 1807, et dont il a été publié un extrait dans le *Bulletin des sciences de la société Philomatique*, année 1808, page 112. Il a joint ensuite à ce premier ouvrage des notes sur la convergence des séries, la diffusion de la chaleur dans un prisme infini, son émission dans un espace vide d'air, les constructions qui servent à rendre

sensibles les principaux théorèmes de cette analyse; enfin la solution d'une question qui était alors entièrement nouvelle, celle du mouvement périodique de la chaleur à la surface du globe terrestre.

Le second Mémoire sur la propagation de la chaleur a été déposé aux archives de l'Institut le 28 septembre 1811 : il est formé du précédent et des notes déjà remises. L'auteur a seulement retranché des constructions géométriques et des détails d'analyse qui n'avaient pas un rapport nécessaire avec la question physique, et il a ajouté l'équation générale qui exprime l'état de la surface. C'est cet ouvrage qui, ayant été couronné au commencement de 1812, est textuellement inséré dans la collection des Mémoires. Il a été livré à l'impression en 1821 par M. Delambre, secrétaire perpétuel; savoir : la première partie, dans le volume de 1819; la seconde, dans le volume suivant.

Les résultats de ces recherches, et de celles que l'auteur a faites depuis, sont aussi indiqués dans divers articles rendus publics. Voir les *Annales de chimie et de physique*, tome III, page 250, année 1816; tome IV, page 128, année 1817; tome VI, page 259, année 1817; le *Bulletin des sciences de la société Philomatique*, année 1818, page 1, et année 1820, page 60; l'*Analyse des travaux de l'Académie des Sciences*, par M. Delambre, année 1820, &c.; et l'ouvrage publié par l'auteur sous ce titre : *Théorie analytique de la chaleur*, in-4.°, Paris, 1822.
