EXPÉRIENCES

Destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvemens très-lents,

Par le citoyen Coulomb.

Lu le 6 prairial an 8.

Lorsqu'un corps est frappé par un fluide avec une vîtesse un peu considérable, plus grande, par exemple, que deux ou trois décimètres par seconde, soit que ce soit le corps en mouvement qui frappe le fluide, soit que ce soit le fluide en mouvement qui frappe le corps, l'on trouve, d'après l'expérience, la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse.

Mais dans les mouvemens extrêmement lents, au-dessous, par exemple, d'un centimètre par seconde, la résistance n'est plus uniquement proportionnelle au carré de la vîtesse, mais à une fonction de la vîtesse dont tous les autres termes disparoissent dans les grandes vîtesses, relativement à celui qui est proportionnel au carré; mais comme, en supposant la vîtesse très-petite, la quantité qui représente la résistance est également très-petite, il est très-difficile de l'évaluer par les moyens ordinaires, et encore plus de séparer dans cette évaluation ce qui appartient aux différens termes de la formule.

D'après ce premier aperçu, mon objet dans ce mémoire a dû être de remplir les deux conditions suivantes :

1°. D'employer un genre de mesure avec lequel il me fût possible de déterminer d'une manière presque exacte les plus petites forces ;

2°. De pouvoir donner, à ma volonté, aux corps que je voulois soumettre à l'expérience, un degré de vîtesse assez petit pour que la partie de la résistance qui est proportionnelle au carré de la vîtesse, devînt comparable avec les autres termes de la fonction qui représente cette résistance ; ou même, dans quelques cas, que la partie de la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse devînt si petite comparativement aux autres termes, que l'on pût la négliger.

Ainsi, ayant trouvé, comme on le verra dans les expériences qui vont suivre, que la résistance des fluides dans les mouvemens très-lents est représentée par deux termes, l'un proportionnel à la simple vîtesse, l'autre au carré de la vîtesse ; si, dans un exemple particulier, la portion de la résistance proportionnelle à la simple vîtesse est égale à celle proportionnelle au carré de la vîtesse, lorsque le corps a un centimètre de vîtesse par seconde, il en résultera que lorsque le corps aura un mètre de vîtesse par seconde, la partie proportionnelle au carré de la vîtesse sera cent fois plus considérable que celle proportionnelle à la simple vîtesse : mais si la vîtesse du corps n'étoit que d'un dixième de millimètre par seconde, la partie de la résistance proportionnelle à la simple vîtesse seroit cent fois plus grande que celle qui est proportionnelle au carré.

C'est en me conformant à cette observation que, maître de diminuer les vîtesses autant que je le voulois, il m'a été possible, dans presque toutes les expériences qui suivent, de rendre la partie de la résistance proportionnelle à la simple vîtesse plus grande que celle qui est proportionnelle au carré; il y a même des cas, et tel est celui où un plan se meut dans le sens de sa surface avec un mouvement très-lent, où la portion de la résistance proportionnelle au carré disparoît presque en entier et peut être négligée.

2. Newton, en cherchant (liv. II des *Principes*, proposition XL,) la résistance que l'air oppose au mouvement oscillatoire d'un globe dans les petites oscillations, s'est servi d'une formule composée de trois termes : l'un comme le carré de la vîtesse, le second comme la puissance $\frac{3}{2}$ de la vîtesse, et le troisième comme la simple vîtesse.

Dans une autre partie du même ouvrage, en calculant la résistance que les globes éprouvent en tombant lentement dans l'air ou dans l'eau, il réduit la formule à deux termes; l'un comme le carré de la vîtesse, l'autre constant.

D. Bernouilli, en soumettant au calcul (t. III et V des *Mémoires de Pétersbourg*,) les expériences du pendule faites par Newton, suppose seulement deux termes.

pour représenter la résistance; l'un comme le carré de la vîtesse, l'autre constant : mais il ajoute que quoique les expériences ne s'accordent point avec la théorie, l'on ne peut cependant en rien conclure, parce que les observations du pendule sont si délicates qu'il est très-difficile de déterminer la petite quantité constante d'après l'observation de la diminution successive des oscillations.

Sgravesande, *Élémens de physique*, §. 1911, a trouvé que la pression du fluide en mouvement contre un corps en repos, est en partie proportionnelle à la simple vîtesse, et en partie au carré de la vîtesse; mais que quand le fluide est en repos et le corps en mouvement, c'est le cas du pendule : alors la résistance, selon le même auteur, §. 1975, est en partie proportionnelle au carré de la vîtesse, et en partie à une quantité constante. Ainsi dans cette circonstance, c'est-à-dire lorsque c'est le corps en mouvement qui rencontre le fluide, MM. Newton, Bernouilli et Sgravesande sont d'accord entre eux, et supposent la formule qui représente la résistance des fluides composée de deux termes; l'un comme le carré de la vîtesse, l'autre constant.

Les expériences qui vont suivre prouveront, je crois, d'une manière incontestable, que lorsque le corps en mouvement frappe le fluide, la pression qu'il éprouve est représentée par deux termes, l'un proportionnel à la simple vîtesse, l'autre au carré de la vîtesse, et que, s'il y a un terme constant, il est dans tous les fluides qui ont peu de cohérence, telle que seroit l'eau, par exemple, si peu considérable qu'il est presque impossible de l'apprécier.

Préparation aux expériences.

3. Je me suis servi, dans les expériences qui vont suivre, de la force de torsion d'un fil de laiton. L'on voit, *fig.* 1, que l'appareil qui a servi aux expériences 1, 2, 3 et 4 est un vase de 8 décimètres de diamètre et de 4 décimètres de hauteur. Ce vase est plein d'eau, et c'est dans cette eau qu'oscille, au moyen de la force de torsion du fil de suspension *ag*, le corps dont on veut évaluer la résistance.

Au haut de la potence *NLK* est un petit cercle *fe* percé à son centre, où entre une cheville terminée en *a* par une pince.

L'extrémité supérieure *a* du fil de suspension *ag* est saisie par cette pince; l'extrémité inférieure du même fil est saisie par une autre pince *g* qui répond au centre du disque *DQ*. Cette pince est placée à l'extrémité supérieure d'un cylindre de cuivre *g*, et dont le diamètre est 10 à 12 millimètres; ce cylindre traverse le disque perpendiculairement à son plan; l'axe du cylindre est le même que l'axe du disque; l'extrémité inférieure du cylindre plonge dans l'eau de 4 ou 5 centimètres.

Le disque *DQ* se trouve ainsi suspendu horizontalement au-dessus de la surface de l'eau, et la circonférence de ce disque est divisée en 480 degrés ou parties égales. Lorsqu'il est en repos, ce qui arrive lorsque la torsion du fil est nulle, l'on place l'index *fQ* sur le point *o* de la division du disque. La petite régle *fm*, qui porte l'index, peut s'élever ou se baisser à volonté autour de son axe *n*, et la potence *fmgh* se transporte autour du disque, suivant la position où s'arrête le point *o* de ce disque.

C'est au-dessous du cylindre *gd* que l'on place les plans et les corps dont on veut déterminer la résistance. L'on fait tourner légèrement le disque *DQ* en le soutenant avec les deux mains jusqu'à une certaine distance de l'index, sans déranger la position verticale du fil de suspension. L'on abandonne ensuite ce disque à lui-même. Pour lors la force de torsion le fait osciller: l'on observe la diminution successive des oscillations. Une formule très-simple donne en poids la force de torsion qui produit les oscillations; une autre formule, connue de tous les géomètres, mais qu'il m'a paru nécessaire de présenter de nouveau sous la forme qui s'adapte le mieux à nos expériences, détermine par une approximation suffisante dans la pratique, au moyen de la diminution successive des oscillations comparées avec l'amplitude de l'oscillation, quelle est, relativement à la vîtesse, la loi de résistance qui produit cette diminution.

4. L'on voit, d'après cet exposé, que la méthode dont j'ai fait usage dans la réduction des expériences est à peu près la même que celle d'après laquelle Newton et plusieurs autres géomètres ont cherché à déterminer

la résistance des fluides, en observant les diminutions successives d'un pendule oscillant dans un milieu résistant; mais le moyen que j'emploie est beaucoup plus propre à faire connoître les petites quantités qu'il faut évaluer dans cette recherche.

Dans le pendule, si le corps est soutenu par un fil, l'on ne peut tenter d'expériences qu'avec un globe sphérique, toute autre figure ne conservant pas dans les oscillations une position fixe; si, pour éviter cet inconvénient, le corps est soutenu par une verge, l'incertitude dans l'évaluation des frottemens et de la résistance de la verge ne permet plus d'apprécier la petite quantité que l'on veut déterminer.

En se servant du pendule, il faut commencer par déterminer la pesanteur spécifique du corps relativement à celle du fluide : la moindre erreur dans cette évaluation rend les résultats incertains.

Dans les différentes situations du pendule qui oscille, le fil ou la verge du pendule plonge successivement plus ou moins dans le fluide, et les altérations qui peuvent en résulter sont souvent plus considérables que les petites quantités qui sont l'objet de cette recherche.

L'on peut observer encore que ce n'est que dans les petites oscillations que la force qui ramène le pendule à la verticale est proportionnelle à l'angle qu'il forme avec cette verticale dans ses différentes positions, condition nécessaire à l'application des formules; mais les petites oscillations ont de très-grands inconvéniens, et les pertes successives ne s'y déterminent que par des quantités assez difficiles à évaluer exactement, et qui sont altérées par le moindre mouvement du fluide ou de l'air de la chambre où se fait l'observation.

Il ne faut pas non plus oublier que le fil ou la verge qui soutient le corps éprouve, dans les petits degrés de vîtesse, une résistance beaucoup plus grande au point de flottaison que dans les autres parties; que cette résistance est très-variable, parce que le fil, ou la verge qui soutient le corps, oblige le fluide de monter le long du fil plus ou moins, suivant la vîtesse du pendule et suivant que le fil a été primitivement mouillé ou non dans la partie placée au-dessus de la flottaison.

Enfin, dans la pratique, il est impossible d'augmenter considérablement la durée de chaque oscillation, à moins de donner au globe soutenu par le fil presque la même pesanteur spécifique qu'au fluide; mais pour lors il est très-difficile d'être sûr que le centre de gravité du corps est le même que son centre de figure. Ainsi le globe soutenu par un fil aura presque toujours des mouvemens de rotation autour de son centre de gravité, et ce centre parcourra une ligne courbe qui ne sera pas dans le même plan.

5. Tous ces inconvéniens, qu'il nous paroît impossible d'éviter, ont jeté une si grande incertitude dans les résultats des expériences, que des physiciens géomètres, tels que Newton et D. Bernouilli, n'ont pu en déduire les lois de la résistance des fluides dans les mouvemens très-lents; mais ces irrégularités ne paroissent pas à craindre en se servant de l'appareil que nous venons de

décrire, et en comparant les résistances des fluides avec la force de torsion du fil de suspension. Ici le corps est entièrement submergé dans le fluide, et chaque point de sa surface oscillant dans un plan horizontal, le rapport des densités spécifiques du fluide et du corps n'influe en rien sur l'évaluation de la force qui produit le mouvement; nous sommes donc exempts de ce genre d'altération.

L'on peut, dans les expériences, donner aux oscillations jusqu'à un ou deux cercles d'amplitude, et rendre la durée de chaque oscillation aussi longue qu'on le desire, soit en diminuant le diamètre du fil, soit en augmentant sa longueur; ou, si on le préfère, en augmentant le moment d'inertie du disque soutenu par le fil.

J'ai fait plusieurs expériences où chaque oscillation duroit plus de 100 secondes; mais pour lors je me suis aperçu que le moindre mouvement dans le fluide, l'ébranlement occasionné par le passage d'une voiture, altéroient sensiblement les résultats; et, après beaucoup d'essais, j'ai trouvé que la durée de chaque oscillation, qui convenoit le mieux à ce genre d'expérience, étoit entre 20 et 30 secondes, et que l'amplitude des oscillations qui donnoient le plus de régularité dans les résultats, étoit comprise entre 480 degrés, division entière du disque, et 8 ou 10 divisions à compter du point *o* de torsion.

Dans les amplitudes au-dessous de 8 divisions, la force qui produit les oscillations se trouve si petite que la moindre irrégularité étrangère à la résistance du fluide l'altère quelquefois d'une manière sensible ; et si l'on étoit obligé, comme dans quelques expériences particulières, d'observer des oscillations d'une très-petite amplitude, il faudroit s'établir dans un endroit bien fermé, et éloigné de tout ce qui peut produire le moindre ébranlement.

6. D'après les différentes observations qui précèdent, il est facile de voir que ce n'est que dans les mouvemens très-lents, tels que ceux qui font l'objet de ce mémoire, que les corps oscillans, ou parcourant des cercles, peuvent donner des résultats satisfaisans : dans les oscillations de peu de durée ou dans des mouvemens circulaires très-prompts, le fluide frappé par le corps est continuellement en mouvement, et lorsque le corps revient à la même place, son mouvement est contrarié ou aidé par le mouvement antérieur qu'a conservé le fluide.

Aussi notre confrère le citoyen Bossu, dans la suite des belles et nombreuses expériences qu'il a publiées sur la résistance des fluides, voulant donner aux corps soumis à l'expérience des degrés de vîtesse d'après lesquels on pût calculer leur résistance dans toutes les questions relatives, soit à la mécanique, soit à la navigation, a disposé son appareil de manière que chaque point du corps suivît nécessairement une ligne droite sans pouvoir osciller dans aucun sens.

De la force de torsion des fils de métal.

7. J'ai donné en 1777, dans un *Mémoire sur les boussoles de déclinaison*, imprimé dans le tome IX des *Mémoires des Savans étrangers*, la théorie des forces de torsion des cheveux et des soies; en 1784, *Mémoires de l'Académie des sciences*, j'appliquai la même théorie aux fils de métal, et je la fondai sur un grand nombre d'expériences. Je trouvai pour lors que le moment de la force de torsion d'un fil de métal tordu autour de son axe, étoit en raison composée de l'angle de torsion de la quatrième puissance du diamètre, et en raison inverse de la longueur du fil, le tout multiplié par un coefficient constant dépendant de la nature du métal.

Nous n'aurons besoin, dans les expériences qui suivent, que de savoir que la force de torsion est proportionnelle à l'angle de torsion; loi que tout le monde peut vérifier par une expérience très-simple : car si l'on suspend un corps quelconque par un fil de métal, l'on trouvera que quelqu'étendues que soient les oscillations que fasse le corps autour de l'axe vertical formé par le fil de suspension, la durée de chaque oscillation sera toujours la même; d'où il résulte, d'après une proposition connue de tous les géomètres, que le moment de la force de torsion est proportionnel à l'angle de torsion.

8. Pour avoir, d'après l'expérience, la force de torsion représentée par un poids connu, je suspends (*fig.* 2,

n° 1) un disque de métal di, qui a par-tout la même épaisseur, et qui est soutenu horizontalement par le fil fc; je détermine avec une balance la pesanteur de ce disque, je mesure son diamètre, je le fais ensuite osciller autour de son centre C ou autour de l'axe vertical fc, ayant soin que dans son oscillation il se dérange très-peu de sa situation horizontale. J'observe le nombre d'oscillations qu'il fait dans un temps donné : ces quantités connues suffisent pour évaluer en poids la force de torsion.

Soit (*fig.* 2, n° 2) ABE le plan du disque dont le centre est en C, que ACB représente l'angle de torsion du fil au commencement du mouvement, A étant le point de départ; soit $ACB = A$; $ACm = S$.

Lorsque l'angle de torsion sera réduit à BCm, le moment de la force de torsion qui tend à ramener le disque vers le point B, où la torsion est nulle, sera égal à $n(A - S)$, où n est une quantité constante qui dépend de la nature du métal; et si u est la vîtesse angulaire, dt l'élément du temps, $\int \mu r^2$ la somme des momens d'inertie de tous les points du disque relativement au centre C, l'on aura l'équation

$$n(A - S)\, dt = du \int \mu r^2;$$

mais dans le pendule ordinaire, dont la longueur est l, on a pour la formule qui exprime le mouvement oscillatoire, en supposant l'angle, depuis le départ jusqu'à la verticale, égal à A, et g la force de la gravité,

$$\frac{g}{l}(A - S)\, dt = du;$$

et si l'on fait en sorte que les deux formules soient identiques, les oscillations produites par la torsion, et celle du pendule seront d'une égale durée : l'on aura par conséquent

$$\frac{n}{S\mu r^2} = \frac{g}{l},$$

où l représente la longueur d'un pendule qui fait chaque oscillation dans le même temps que le disque oscillant en vertu de la force de torsion.

Il ne s'agit plus que d'avoir une valeur effective, la quantité n; c'est-à-dire qu'il faut avoir, à la place de n, un poids déterminé multiplié par un levier connu.

9. Reprenons pour cela le disque EBA (*fig.* 2, n° 2), sur lequel nous avons tracé le segment élémentaire $mC'm$, dont l'angle est représenté par ds; que Cm, rayon du disque, soit R, soit $Cr = r$; $rr' = rds$; le petit élément $rr'ss' = rdr\,ds$, est représenté dans la formule par la molécule μ : ainsi $\int \mu r^2 = \int r^3\, dr\, ds = S\frac{r^4}{4}$; et si l'angle ds est étendu à un cercle entier, que C soit le rapport de la circonférence au rayon, l'on aura $n = \frac{gCR^4}{4L}$; mais $\frac{CR^2}{2}$ représente la surface du disque $\frac{gCR^2}{2}$ représentera par conséquent le poids du disque. Ainsi P étant le poids du disque, R son rayon, l la longueur du pendule qui fait les oscillations de la même durée que celle du disque, l'on aura

$$n = \frac{PR^2}{2l},$$

quantité, comme l'on voit, qui ne renferme que des quantités connues, et qui est représentée par le poids P du disque, multiplié par un levier dont la valeur est $\frac{R^2}{2l}$.

10. La valeur générale $n = \frac{\int \mu r^2}{l}$, que nous avons trouvée, art. 8, pour tous les corps, quelle que soit leur figure, donne dans les expériences une grande facilité, lorsqu'une fois la valeur numérique de n a été fixée par une expérience particulière, pour déterminer par un corps quelconque la valeur de $\int \mu r^2$, sans connoître aucune des dimensions de ce corps.

Supposons que nous suspendions successivement au même fil de métal deux corps différens; nous avons prouvé, dans le volume des *Mémoires de l'Académie* pour 1784, que la tension plus ou moins grande du fil de suspension n'influoit pas sensiblement sur la force de torsion : ainsi, quel que soit le poids suspendu à un même fil, la valeur du moment de la force de torsion représentée par n restera la même; ainsi, si μ' représente une molécule du corps suspendu, r' la distance de cette molécule à l'axe de suspension, l' la longueur du pendule qui feroit ses oscillations dans le même temps que la force de torsion, l'on aura toujours la quantité constante

$$n = \frac{g}{l'} \int \mu' r'^2,$$

où l' est donné par l'observation du temps qu'aura duré un certain nombre d'oscillations.

Et si $\int \mu r^2$ est la quantité primitive d'où nous avons tiré la valeur de n, nous aurons

$$\int \mu' r'^2 = \frac{l'}{l} \int \mu r^2;$$

mais les longueurs de deux pendules étant comme le carré du temps d'un même nombre d'oscillations, si l'on nomme T' le temps qui répond à $\int \mu' r'^2$, et T le temps qui répond à $\int \mu r^2$, nous aurons

$$\int \mu' r'^2 = \frac{T'^2}{T^2} \int \mu r^2.$$

Ce qui donne, comme l'on voit, un moyen très-facile de déterminer $\int \mu' r'^2$, puisqu'il suffit d'observer la durée d'un certain nombre d'oscillations du corps, en le suspendant au même fil de métal qui a servi à déterminer n d'après la formule $n = \frac{g}{l} \int \mu r^2$, en se servant d'un corps d'une figure telle, qu'il a été facile d'en déduire en valeurs numériques $\int \mu r^2$.

Mais n une fois connu, puisque $\int \mu r^2 = \frac{n l}{g}$, nous avons également, quel que soit le corps qui fasse ses oscillations dans le temps T,

$$\int \mu' r'^2 = \frac{n l T'^2}{g T^2}.$$

11. Nous venons de déterminer le moment de la force de torsion dont nous comptons faire usage en la comparant, dans les mouvemens oscillatoires, avec la résistance des fluides; voici, relativement à cette résistance,

ce que la théorie paroît indiquer, et ce qui effectivement se trouve conforme à l'expérience.

Lorsque le corps en mouvement frappe les molécules du fluide, il éprouve deux espèces de résistances; l'une due à la cohérence des molécules du fluide qui se séparent l'une de l'autre, et ce nombre de molécules ainsi séparées étant proportionnel à la vîtesse du corps, la résistance qui dépend de la cohérence est aussi proportionnelle à cette vîtesse.

L'autre partie de la résistance est due à l'inertie des molécules, qui, frappées par le fluide, acquièrent un certain degré de vîtesse proportionnel au degré de vîtesse du corps; mais comme le nombre de ces parties est proportionnel à la vîtesse, il en doit résulter une résistance proportionnelle au carré de la vîtesse.

La théorie semble donc nous indiquer que la résistance des fluides doit être représentée par la somme de deux quantités; l'une proportionnelle à la simple vîtesse, l'autre au carré de la vîtesse. En adoptant ces deux suppositions, que la théorie nous indique, et que nous allons trouver confirmées par l'expérience dans les mouvemens très-lents, il est facile de soumettre au calcul la résistance que les corps éprouvent dans les mouvemens oscillatoires.

12. Supposons (*fig.* 1) qu'en d, au-dessous du cylindre gd, l'on ait fixé horizontalement plusieurs leviers très-fins $d\mu$, $d'\mu'$, etc., à l'extrémité desquels se trouvent les petits corps μ, μ', etc., qui sont en entier plongés dans le fluide. Nous négligeons pour le moment la

petite résistance des leviers. Soit l'angle de torsion primitif, au moment du départ, $edA = A$, qu'après le temps t cet angle soit $ed\mu$; faisant $Ad\mu = S$; que u soit la vîtesse angulaire.

Après le temps t, lorsque l'angle de torsion sera réduit à μde, le moment de la force de torsion qui fait osciller tout le système sera égal à $n(A - S)$, et le moment de la résistance due au fluide $(au + bu^2)$. Dans cette expression, a et b sont des quantités constantes dépendantes de la figure et du nombre des corps qui oscillent dans le fluide, et de la longueur du levier ou de la distance de chacun de ces corps à l'axe de rotation. Nous déterminerons dans la suite ces quantités a et b, pour pouvoir comparer la résistance des différens corps d'après les expériences.

Le moment de la force de torsion qui fait osciller les corps dans le fluide, et la résistance qu'ils éprouvent, étant données par les deux expressions qui précèdent, les principes de dynamique nous donnent, pour la formule qui représente la résistance, comparativement avec la force de torsion

$$[n(A - S) - au - bu^2]\, dt = du \int \mu' r'^2;$$

ou, ce qui revient au même,

$$[n(A - S) - au - bu^2]\, ds = u\, du \int \mu' r'^2;$$

où $\int \mu' r'^2$ représente le moment d'inertie de tous les petits corps μ'. L'on remarque que lorsque la résistance n'est pas très-considérable relativement à la force, l'on tire la valeur approchée de u de la formule

$$u\,du = \frac{n\,(A - S)\,ds}{\int \mu' r'^2};$$

ce qui donne $u = \left(\frac{n}{S\mu' r'^2}\right)^{\frac{1}{2}} (2\,As - ss)^{\frac{1}{2}}$.

Cette valeur de u, introduite dans les termes qui représentent la résistance, elle deviendra

$$uu\int\mu' r'^2 = n\,(2\,As - ss) - 2\,a\left(\frac{n}{S\mu' r'^2}\right)^{\frac{1}{2}}\int ds\,\sqrt{2\,As - ss}$$
$$- \frac{2\,bn}{S\mu' r'^2}\int ds\,(2\,As - ss).$$

L'intégrale de $\int ds\,\sqrt{2\,As - ss}$ est l'aire d'une portion de cercle dont s est le sinus verse et A le rayon. Ainsi lorsque l'oscillation sera achevée, S étant à peu près égal à $2A$, cette intégrale donnera par approximation un demi-cercle, dont A est le rayon.

La seconde partie $\frac{2\,bn}{S\mu' r'^2}\int ds\,(2\,As - ss)$, s'intègre complétement. Ainsi l'on aura, lorsque l'oscillation sera achevée, et que u sera égal à o, en nommant C le rapport de la circonférence au rayon, et S l'arc total parcouru,

$$n\,\frac{(2\,A - S)}{A} = \frac{a\,C}{4}\left(\frac{n}{S\mu' r'^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4\,bnA}{3\,S\mu' r'^2}.$$

Mettons à la place de $\int\mu' r'^2$, sa valeur $\frac{T'^2\,n\,l}{g\,T^2}$, trouvée article 10, et nous aurons pour la formule que nous voulons comparer aux expériences,

$$\frac{2\,A - S}{A} = \frac{a\,C\,T}{4\,n\,T'}\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4\,b\,T^2}{3\,n\,T'^2}\left(\frac{g}{l}\right).$$

13. Dans cette formule, n représente le moment de la force de torsion du fil de suspension, quantité qui se détermine par la durée T des oscillations du disque; ce qui donne la longueur l du pendule qui fait ses oscillations dans le même temps. T' est le temps d'une oscillation du système, composé du disque et des corps fixés sous le cylindre, que l'on soumet ici à l'expérience. $(2A - S)$ est la différence entre l'oscillation descendante, mesurée depuis le point où la force de torsion est A, jusqu'au point où elle est nulle, et l'oscillation montante, depuis le point o jusqu'au point où l'oscillation s'achève. L'on remarquera que le disque DQ (*fig.* 1), sous le cylindre duquel gd l'on fixe en d le plan ou le corps que l'on veut faire osciller dans le fluide, a un momentum d'inertie en général si considérable relativement au moment des corps soumis à l'expérience, que dans beaucoup de cas l'on peut, dans l'expression qui précède, faire $T = T'$.

14. L'on remarquera encore, ce qui simplifie l'usage de la formule, que lorsque c'est le même corps qui oscille, si la diminution des amplitudes des oscillations n'est pas considérablement altérée à chaque oscillation, le temps des grandes et des petites oscillations est à peu près le même. Ainsi, dans ce cas qui a souvent lieu dans nos expériences, il ne se trouve dans la formule d'autres quantités variables que l'amplitude A de l'oscillation, et la différence $(2A - S)$ entre l'oscillation descendante et l'oscillation montante.

Si l'on fait par conséquent $(2A - S) = dA$, et les constantes $\frac{aCT}{4nT'}\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} = m$; $\frac{4bT^2}{3nT'^2}\left(\frac{g}{l}\right) = p$; notre formule se réduira à la forme

$$\frac{dA}{A} = m + pA;$$

où m et p sont des quantités constantes lorsque $T = T'$, et variant avec T', lorsque T' n'est pas égal à T.

Donnons un exemple qui servira de modèle pour la plus grande partie des applications de la théorie aux expériences.

Je suppose que, dans une expérience, en tordant le fil de suspension d'un cercle, ou de 480 degrés, qui est la division de mon disque, le système, à la seconde oscillation, ne revient qu'à 460 degrés. Il y a par conséquent 20 degrés de perte, ou 10 degrés à chaque oscillation : ainsi $dA = 10$ degrés ; l'amplitude moyenne A entre les deux oscillations $= \left(\frac{480 + 460}{2}\right) = 470$ degrés.

Si ensuite, en tordant seulement de 240 degrés, le système, après deux oscillations, revient à 232 degrés, il y aura 8 degrés de perte pour deux oscillations, ou 4 degrés pour chacune.

Ainsi $dA = 4$ degrés ; et $A = \frac{240 + 232}{2} = 236$.

En substituant ces valeurs dans la formule précédente, j'aurai les deux égalités suivantes :

Première . . . $\frac{10}{470} = m + 470\,p = 0.0213$;

Seconde . . . $\frac{4}{236} = m + 236\,p = 0.0169$.

Retranchant la seconde de la première, m s'évanouit, et j'ai $p = \frac{0.0044}{234} = 0.000018$.

Je substitue cette valeur de p dans une des deux équations, et j'en conclus la valeur de m.

C'est ainsi qu'au moyen de cinq ou six observations faites à des amplitudes d'oscillations différentes, je vérifie par leur comparaison si m et p sont des quantités constantes, et que je trouve que la résistance des fluides dans les mouvemens très-lents est en partie proportionnelle au carré de la vîtesse, et en partie à la simple vîtesse.

15. Mais il faut remarquer qu'avant de faire cette comparaison, il faut avoir égard à une petite correction qui provient, soit de l'imperfection de l'élasticité, soit de la petite résistance due au mouvement du disque dans l'air, ainsi qu'à celle du cylindre gd, qui plonge de 2 ou 3 centimètres dans l'eau. J'ai trouvé dans le mémoire déja cité, imprimé en 1784 (*Mémoires de l'Académie des sciences*), que la force de torsion étoit un peu altérée dans les différens degrés de torsion, parce que l'élasticité de torsion n'étoit pas parfaite; en sorte que la diminution de l'amplitude à chaque oscillation résultante de cette imperfection, étoit toujours proportionnelle à l'amplitude des oscillations : même résultat, comme l'on voit, que nous aurions eu si l'on avoit supposé cette altération proportionnelle à la vîtesse : ainsi il ne résulte de cette imperfection dans l'élasticité, qu'une petite quantité qui se trouve

réunie, et qu'il faut retrancher du coefficient m, qui *répond* à la *portion de résistance due à la simple* vîtesse.

Quant à la résistance de l'air sur le disque, et à celle de l'extrémité du cylindre dans l'eau, elle est, comme on va le voir tout-à-l'heure, proportionnelle à la vîtesse, et si peu considérable dans l'eau, que l'on pourroit, pour ainsi dire, la négliger. Ce n'est que dans les fluides très-cohérens que cette dernière quantité est sensible. Quelle qu'elle soit au surplus, elle se trouvera toujours comprise dans la petite correction que nous ferons aux résultats des expériences.

16. Lorsque, par la nature des expériences que l'on exécute, le terme proportionnel au carré des vîtesses disparoît, comme lorsqu'un plan se meut, dans le sens de sa surface, d'un mouvement très-lent; la formule de l'article 14 se réduit à $\frac{dA}{A} = m$; et en nommant A' l'arc remonté, l'on a par conséquent $\frac{A - A'}{A} = m$, où A représente la partie de l'oscillation depuis le point de départ jusqu'au point où la torsion est nulle, et A' l'autre partie de l'oscillation, depuis le point où la torsion est nulle, jusqu'au point où l'oscillation se termine. Cette quantité $\frac{A - A'}{A} = m$, donne $A' = A\,(1 - m)$. Ainsi si, après un nombre q d'oscillations successives, $\overset{(q)}{A}$ représente l'amplitude de la dernière oscillation, l'on aura $\overset{(q)}{A} = A\,(1 - m)^q$: d'où résulte qu'après un nombre

d'oscillations q l'on aura toujours $\frac{log. A - log. A'}{q}$ $- log. (1 - m)$; c'est-à-dire qu'après un nombre q d'oscillations, le logarithme de la quantité qui exprime l'amplitude de la première oscillation, depuis le point de départ jusqu'au point où la torsion est nulle, moins le logarithme de l'amplitude de la dernière oscillation observée, divisé par le nombre des oscillations, est toujours une quantité constante, quel que soit le nombre des oscillations.

Je vais faire usage de cette dernière formule dans l'évaluation de la résistance qu'éprouve un plan qui se meut d'un mouvement très-lent dans le sens de sa surface, et qui pour lors *paroît ne faire que détacher les molécules du fluide l'une de l'autre*, sans leur donner une vîtesse sensible; car lorsque le plan a beaucoup de vîtesse, il faut, dans la réduction des expériences, faire nécessairement entrer le terme proportionnel au carré de la vîtesse.

Première expérience.

J'AI fixé horizontalement, au moyen d'une vis, sous le cylindre en *d* (*fig.* 1), un cercle de fer-blanc de 195 millimètres de diamètre. Le système suspendu au fil de laiton étoit composé du disque *DQ*, du cylindre *gd* et du plateau de fer-blanc *AA'C*; il a fait quatre oscillations en 97".

Premier essai. LE départ, à 192^d du point o de torsion, l'amplitude des oscillations, après dix oscillations, se trouve réduite à . . . . 52^d3.

Second essai. Le départ à 13^d8, après dix oscillations, à . . . . 3^d3

Le premier essai donne, d'après notre formule,

$$\frac{log.\ 192 - log.\ 52.3}{10} = 0.0565;$$

le second essai donne, d'après cette même formule,

$$\frac{log.\ 13.8 - log.\ 3.3}{10} = 0.0571.$$

Observation sur cette expérience.

18. DANS le premier essai, le point de départ étoit à 192 degrés du point *o*; dans le second, il n'étoit qu'à 13^d8 du même point : ainsi l'amplitude du départ au premier essai étoit à peu près quatorze fois plus considérable qu'au dernier; et, malgré cela, on trouve qu'après dix oscillations la différence des logarithmes des amplitudes, divisée par le nombre des oscillations, est presque exactement la même. Ainsi l'on peut conclure de cette expérience que la résistance étoit ici proportionnelle à la vîtesse, et que le terme qui exprime la partie de la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse, n'altéroit pas sensiblement le mouvement du plan.

Il faut au surplus remarquer que le jour où j'ai fait cette expérience, le temps étoit très-calme; ce qui m'a permis d'observer de très-petites amplitudes, et de compter sur leur résultat.

Seconde expérience.

19. En suivant le procédé de l'expérience qui précède, j'ai fixé sous le cylindre un plateau de fer-blanc de 140 millimètres de diamètre; il faisoit quatre oscillations en 92″. J'ai trouvé par plusieurs expériences faites depuis 200^d jusqu'à 8^d, que la différence des logarithmes des amplitudes, pour dix oscillations successives, divisée par 10, étoit, quelle que fût l'amplitude de départ, égale à 0.021.

Troisième expérience.

20. Sous le même cylindre, j'ai fixé par son centre un cercle de fer-blanc de 119 millimètres de diamètre. Le système faisoit quatre oscillations en 91″. J'ai eu pour la différence des logarithmes des amplitudes de départ et d'arrivée, après dix oscillations divisées par 10, la quantité 0.0135.

21. Mais avant d'employer les expériences qui précèdent à déterminer le coefficient de la vîtesse dans la formule qui représente la partie de la résistance du fluide proportionnelle à la simple vîtesse, il y a, comme je l'ai dit plus haut, une petite quantité dépendante de l'imperfection de l'élasticité du fil de suspension, qui, dans les différentes amplitudes des oscillations, les altère proportionnellement à leur amplitude, ou, ce qui revient au même d'après la théorie que nous

venons d'exposer, proportionnellement à la vîtesse. Il faut donc connoître cette quantité pour pouvoir la retrancher de celle que nous fournit l'expérience, puisque, dans les expériences, la diminution des amplitudes des oscillations, dépendante de l'imperfection de l'élasticité, se trouve réunie et suivre la même loi que celle que nous venons de trouver pour la partie de la résistance des fluides qui est proportionnelle à la vîtesse.

Quatrième expérience.

22. L'EXTRÉMITÉ d du cylindre gd, sans rien attacher dessous ce cylindre, étant plongée dans l'eau de la même quantité que dans les expériences précédentes, l'on a 4 oscillations en 91″.

Premier essai. L'angle de départ, à $245^{d}2$ de torsion, après 12 oscillations, arrive à 209^{d}.

Second essai. L'angle de départ à 120^{d}, après 12 oscillations, arrive à 102^{d}.

Troisième essai. L'angle de torsion à $47^{d}5$, après 64 oscillations, arrive à $20^{d}5$.

En calculant la différence des logarithmes des amplitudes des oscillations, divisée par le nombre des oscillations, l'on aura :

Premier essai . . $\dfrac{\log. 245.2 - \log. 209}{12} = 0.00575$;

Second essai . . $\dfrac{\log. 120 - \log. 102}{12} = 0.00580$;

Troisième essai . $\dfrac{\log. 47.5 - \log. 20.5}{64} = 0.00585$.

23. *Ces trois quantités, quoique calculées pour des* amplitudes très-différentes, sont si rapprochées entre elles que l'on peut les regarder comme égales, et prendre pour leur valeur moyenne 0.0058.

Cette dernière expérience confirme d'une manière incontestable le résultat que j'avois annoncé en 1784, où j'avois trouvé que la diminution des amplitudes d'oscillations, occasionnée par l'imperfection de l'élasticité, étoit proportionnelle à l'amplitude des oscillations.

Il est facile au surplus de s'assurer que l'altération des amplitudes des *oscillations est ici presque due en* entier à l'imperfection de l'élasticité, en plaçant horizontalement un disque de papier très-léger au-dessus *du disque DQ*, et égal à ce disque; car, quoique pour lors la résistance de l'air soit doublée, l'on trouve cependant la diminution de l'amplitude des oscillations presque exactement la même qu'avec un seul disque.

Il faut actuellement tâcher de tirer de cette valeur 0.0058 le coefficient de la vitesse auquel elle peut répondre.

Nous venons de trouver (article 16), que pour un nombre q d'oscillations, $\frac{log. A - log. \overset{(q)}{A}}{q} = - log. (1 - m)$; quantité qui est la même pour q égal à 1, comme pour un autre nombre quelconque d'oscillations : ainsi, pour une seule oscillation, l'on a pour l'imperfection élastique,

$$- log. (1 - m) = \div 0.0058;$$

et comme 10, dans les tables ordinaires, est la quantité dont le logarithme est 1, j'aurai

$$1 - m = \frac{1}{10^{0.0058}};$$

d'où je tirerai

$$m = \frac{dA}{A} = \frac{10^{0.0058} - 1}{10^{0.0058}}.$$

Je cherche dans les tables le nombre dont 0.0058 est le logarithme, et je le trouve égal à 1.0134 : ainsi j'ai

$$m = \frac{dA}{A} = \frac{0.0134}{1.0134} = 0.013.$$

Ainsi la quantité m, déterminée d'après les expériences qui précèdent, doit être, à cause de l'imperfection de l'élasticité, diminuée d'un nombre égal à 0.013.

24. J'ai eu dans la première expérience, pour un cercle de 195 millimètres de diamètre, en divisant la différence des logarithmes des amplitudes par le nombre des oscillations correspondant, $log. (1 - m) = -0.057$. Ainsi, en suivant le procédé de l'article qui précède, j'aurai

$$\frac{dA}{A} = \frac{10^{0.057} - 1}{10^{0.057}} = \frac{140}{1140} = 0.126.$$

Otant la partie de $\frac{dA}{A}$, due à l'imperfection de l'élasticité, et que nous avons trouvée (article qui précède) égale à 0.013, il restera pour la quantité $\frac{dA}{A}$, due à la résistance du fluide, 0.0113.

25. Dans la seconde expérience, nous avons trouvé pour un disque de 140 millimètres de diamètre, la différence des logarithmes des amplitudes de départ et d'arrivée, divisée par le nombre des oscillations qui y correspondent, égale à — 0.021. Ainsi nous aurons

$$\frac{dA}{A} = \frac{10^{0.021} - 1}{10^{0.021}} = \frac{496}{10496} = 0.047.$$

Il faut ôter, pour la partie de $\frac{dA}{A}$, due à l'imperfection de l'élasticité, la quantité 0.013 : ainsi la quantité $\frac{dA}{A}$, uniquement due à la résistance du fluide, donne ici $\frac{dA}{A} = 0.034$.

26. Dans la troisième expérience, le cercle de fer-blanc a 119 millimètres de diamètre, et fait 4 oscillations en 91″. Nous avons trouvé que la différence des logarithmes de deux amplitudes, divisée par le nombre des oscillations, étoit, dans cette expérience, 0.0135 : ainsi

$$\frac{dA}{A} = \frac{10^{0.0135} - 1}{10^{0.0135}} = 0.0306.$$

Il faut retrancher de cette quantité 0.013, dues à l'imperfection de l'élasticité : ainsi l'on aura pour la résistance du fluide

$$\frac{dA}{A} = 0.0176.$$

27. La quantité $\frac{dA}{A}$ déterminée par les trois expériences précédentes, il ne reste plus qu'à comparer entre eux, au moyen de cette valeur, les résistances des différens plans relativement à la grandeur de leur diamètre. Reprenons pour cela (art. 14) la formule fondamentale $\frac{dA}{A} = \frac{aCT}{4nT'}\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$, de laquelle il nous faut tirer la valeur de la constante a, qui, dans la formule primitive $(au + bu^2)$, représentant la résistance, étoit le coefficient constant de la vîtesse; nous pouvons ici, d'après l'expérience, négliger le terme bu^2: ainsi, d'après cette formule, nous aurons

$$a = \frac{4nT'}{CT}\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dA}{A}.$$

L'on voit que dans l'application de cette formule aux expériences des différens cercles, il n'y a de variable que la quantité T', durée du temps de 4 oscillations, et $\frac{dA}{A}$, quantités qui nous sont toutes les deux données par l'expérience.

Ainsi il suffit, dans la comparaison que nous voulons faire de a relativement à ds, dans des cercles de différens diamètres, de comparer entre elles les valeurs de $\frac{dAT'}{A}$, les autres quantités n, l, g, C, T, étant les mêmes dans toutes les expériences. Nous pouvons donc former le petit tableau suivant, qui nous indiquera tout de suite la loi des momens de la résistance qu'éprouvent, de la part du fluide, deux cercles qui oscillent autour de leur centre, comparée avec les diamètres des deux cercles.

	Diamètre des cercles.	Valeur de $\frac{dA}{A}$.	Temps de 4 oscillations.	$log. \frac{T' dA}{A}$.	Log. diam.
1	195	0.113	97″	1.0397	2.2900
2	140	0.034	92″	0.5052	2.1461
3	119	0.0176	91″	0.2045	2.0755

Puisque nous venons de voir que *a* est proportionnel, pour les différens cercles, à $\frac{T' dA}{A}$, c'est cette quantité qu'il faut comparer avec les diamètres; mais ici il est plus simple de comparer les logarithmes, parce que cette comparaison donne tout de suite la loi que l'on cherche. Si j'ôte (nos 1 et 2), pour les diamètres du logarithme de 195, le logarithme de 140, j'aurai le nombre 1439; si je fais la même opération pour la quantité $\frac{T' dA}{A}$, correspondante dans la table, j'aurai pour la différence le nombre 0.5345, qui est très-approchant quatre fois plus grand que celui qui représente le rapport des diamètres; si je compare (nos 1 et 3) les diamètres 195 et 119, je trouverai pour la différence de leurs logarithmes la quantité 0.2145; et si je compare les quantités $\frac{T' dA}{A}$ correspondantes, en retranchant leur logarithme l'un de l'autre, j'aurai la quantité 0.8352, encore très-approchant quatre fois plus grande que celle donnée par les diamètres.

D'où il résulte que les quantités $\frac{T' dA}{A}$, ou les quantités a; qui sont ici dans le même rapport, sont entre elles comme la quatrième puissance des diamètres.

Il faut à présent voir si le calcul théorique sera d'accord avec ce résultat.

28. acb (*fig.* 3) représente un petit segment de cercle dont c est le centre; l'angle $acb = ds$; le rayon $ca = R$. Soit $cm = r$, le petit arc $mn = rds$; soit de plus u la vîtesse angulaire du cercle autour de son centre.

Par la condition du problême, chaque point m a une résistance proportionnelle à sa vîtesse, et la vîtesse de ce point est ru: ainsi la résistance de ce point sera δru, δ étant une constante qui dépend de la cohérence du fluide, et que les expériences qui précèdent vont déterminer.

La résistance de la petite surface élémentaire $m n m' n'$ sera par conséquent $\delta rurdsdr$, et le moment de cette résistance autour du point de rotation C, centre du cercle, sera $\delta rurdsdrr$, dont l'intégrale, pour la surface d'un cercle entier, sera $\frac{360^d \delta u R^4}{4}$, ou, si l'on veut, proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre du cercle.

Ainsi la théorie se trouve ici absolument conforme à l'expérience, et prouve que les momens de la résistance de différens cercles mus autour de leur centre dans un fluide, sont comme la quatrième puissance des diamètres des cercles, lorsque la résistance est proportionnelle à la simple vîtesse.

29. Pour compléter cette première partie de nos recherches, il est nécessaire de déterminer la quantité a de manière qu'elle soit représentée par un poids dont la valeur soit comme multipliée par un levier donné.

Reprenons de l'article 27 la quantité

$$a = \frac{4\,nT'}{CT}\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dA}{A};$$

multiplions cette équation par u, où u exprime la vîtesse angulaire, nous aurons

$$au = \frac{dA}{A}.\ \frac{4\,nT'}{CT}\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{Ru}{R}.$$

Je multiplie, comme l'on voit, le second terme, et je le divise par R, rayon du cercle.

Si V est la hauteur dont un corps en tombant auroit acquis la vîtesse Ru, qui est celle de l'extrémité du rayon du cercle, les formules connues nous donneroient

$$Ru = (2\,gV)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi nous avons le moment de la résistance proportionnelle à la vîtesse, et représenté dans la formule primitive par au, déterminé par l'équation suivante,

$$au = \frac{dA}{A}.\ \frac{4\,nT'}{CTR}\,(2\,lV)^{\frac{1}{2}}.$$

Et puisque $a u$ représente le moment de la résistance due à la simple vîtesse, il ne s'agit, pour avoir la valeur de cette résistance, que de connoître en valeurs numériques les quantités qui forment le second membre de l'équation.

Détermination de la quantité n.

30. Le disque DQ (*fig.* 1), qui m'a servi à déterminer la quantité n, pèse 1003 grammes; il fait quatre oscillations en 91″ : son diamètre est de 271 millimètres. Mais nous avons trouvé (art. 9) $n = \frac{PR^2}{2l}$, où P est le poids du disque, R son rayon, l la longueur du pendule, qui fait ses oscillations d'une durée égale à celle du disque tournant autour de son centre en vertu de la force de torsion.

La longueur du pendule qui bat les secondes a été trouvée de 994 millimètres : ainsi la longueur du pendule qui feroit 4 oscillations en 91″, seroit égale à

$$994\left(\frac{91}{4}\right)^2.$$

Substituant ces valeurs dans celle de n, l'on aura en grammes et millimètres,

$$n = \frac{1003^g}{2.994}\left(\frac{271}{2}\right)^2\left(\frac{4}{91}\right)^2 = 1'7.9.$$

Ainsi n représente un momentum équivalent à un dixième de gramme, attaché à l'extrémité d'un levier de 179 millimètres.

31. La quantité n ainsi déterminée, si nous substituons, dans la formule $au = \frac{dA}{A} \frac{4\,n\,T'}{CTR} (2\ lV)^{\frac{1}{2}}$, les valeurs numériques tirées de la première expérience, où le diamètre du cercle étoit de 195 millimètres, et $\frac{dA}{A}$ égaloit 0.113; où T', pour 4 oscillations, étoit de $97''$: l étant égal, comme nous l'avons vu dans l'article précédent, à $994 \left(\frac{91}{4}\right)^2$, T, pour 4 oscillations, est égal à $91''$. Prenant pour C, rapport de la circonférence au rayon, sa valeur approchée $\frac{44}{7}$, nous aurons

$$au = 14.3 \sqrt{V}.$$

Ainsi, si la chûte V étoit d'un millimètre, le moment de la résistance qui retarderoit le cercle mu dans l'eau *autour de son centre, seroit égal à un poids de 14.3* grammes, suspendu à un levier d'un millimètre; mais la vîtesse d'un corps tombant d'un millimètre de hauteur est à peu près égale à 140 millimètres (1) par seconde.

---

(1) La longueur d'un pendule étant égale à λ, et T le temps d'une oscillation, g la force de la gravité, l'on a par les formules connues, pour une oscillation entière, $\left(\frac{g}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} T = 180^d = \frac{22}{7}$; et comme la longueur du pendule qui bat les secondes a été trouvée de 994 millimètres, l'on a

$$g = 994^m \left(\frac{22}{7}\right)^2;$$

mais si x est la hauteur dont un corps en tombant acquiert la vîtesse u, l'on a $2\,gx = uu$; et si x est égal à un millimètre; l'on aura $u = \sqrt{2g} = \sqrt{18636} = 140$ millimètres.

Ainsi, en supposant qu'un cercle de 195 millimètres de diamètre tourne autour de son centre, dans l'eau, avec une vîtesse telle que l'extrémité de son rayon parcoure 140 millimètres par seconde, le moment de la résistance que le fluide opposera à ce mouvement circulaire, sera égal à $\frac{1}{10}$ de gramme multiplié par un levier de 143 millimètres.

Nous avons vu (art. 28) que lorsqu'un cercle dont le rayon étoit R, tournoit autour de son centre, et que la résistance qu'éprouvoit chaque point de sa surface étoit proportionnelle à sa vîtesse, l'on avoit

$$au = \frac{\delta C R^4 u}{4},$$

où δ est une quantité constante dépendante de la cohérence; mais C étant le rapport de la circonférence au rayon R, CR^2 est égal à la somme des deux surfaces du cercle, et par conséquent $\delta C R^2 . Ru$ représente la résistance d'un plan égal aux deux surfaces du cercle, mu directement dans le sens du plan, avec une vîtesse Ru. Ainsi, dans notre exemple, puisque $au = \frac{\delta C R^4 u}{4} = 14.3$ grammes multiplié par un millimètre; que R est égal à 97.5 millimètres, nous aurons pour représenter un poids égal à la résistance qu'éprouve le plan mu directement dans le sens de sa surface, avec une vîtesse de 14 centimètres par seconde, $\delta C R^3 . u = \frac{4 (14^{s}3)}{97.5} = 0.587$. grammes.

Si le plan n'avoit qu'un centimètre de vîtesse par seconde, il faudroit diviser cette quantité par 14; ce qui donneroit, pour la résistance directe d'une surface égale aux deux surfaces du cercle, 0.042 grammes, à peu près $\frac{1}{25}$ partie de gramme.

En prenant $\frac{44}{7}$ pour le rapport de la circonférence au rayon, la somme des deux surfaces d'un cercle de 97.5 millimètres de rayon sera égale à $\frac{44}{7}.\overline{97.5}^2 =$ 59750 millimètres carrés. Ainsi la résistance qu'éprouveroit une surface d'un mètre carré, mue dans le sens de son plan avec une vîtesse d'un centimètre par seconde, seroit égale à $\frac{1000000 \times 0.042 \times 7}{44.\overline{97.5}^2} = 0.703$ grammes, à peu près $\frac{7}{10}$ de gramme.

32. Au moyen des expériences qui précèdent, il sera facile de déterminer, comparativement avec celle de l'eau, la cohérence des différens fluides. Voici quelques expériences qui pourront servir d'exemple.

J'ai rempli un grand vase d'huile clarifiée, telle qu'elle se trouve dans le commerce pour l'usage des lampes dites à la *quinquet;* le thermomètre de Réaumur étant à 16 degrés au-dessus de 0. (Je tiens note ici du degré de chaleur, parce que la cohérence de l'huile varie avec la température; ce qui n'est pas sensible dans l'eau, au moins depuis 10 degrés jusqu'à 16.)

L'extrémité inférieure du cylindre (*fig.* 1) trempoit de 4 centimètres dans l'huile. Il a donc fallu commencer par déterminer la résistance, qui dépendoit, soit de celle qu'éprouvoit l'extrémité du cylindre, soit de l'imperfection de l'élasticité.

Cinquième expérience.

33. L'EXTRÉMITÉ du cylindre trempant dans l'huile, j'ai trouvé, en ne plaçant aucun corps sous le cylindre, et suivant les procédés indiqués dans les expériences qui précèdent, que la résistance qui retardoit le mouvement étoit proportionnelle à la vîtesse, et que $\frac{dA}{A} = 0.022$; quantité qu'il faut retrancher des résultats que nous trouverons dans toutes les expériences qui vont suivre. J'ai cru devoir ici supprimer les détails, pour ne pas augmenter inutilement le volume de ce mémoire.

Sixième expérience.

34. J'AI fixé, au moyen d'une vis, un cercle de fer-blanc de 62 millimètres de diamètre, sous le cylindre. Le système faisoit 4 oscillations en 91″. Le résultat de plusieurs oscillations faites à différentes amplitudes, m'a donné $\frac{dA}{A} = 0.0455$.

Septième expérience.

35. UN cercle de 101 millimètres de diamètre faisoit également ses 4 oscillations en 91″, et, en suivant les procédés des expériences qui précèdent, l'on a eu $\frac{dA}{A} = 0.183$.

Résultat des expériences qui précèdent.

36. Comme les cercles soumis ici à l'expérience avoient très-peu de momens d'inertie, relativement au disque supérieur, le temps des oscillations étoit presque exactement le même, soit que l'on plaçât ou non les deux cercles sous le cylindre. Ainsi, dans la formule (art. 28) $a = \frac{dA}{A}\left(\frac{l}{g}\right)\frac{4nT'}{CT}$, l'on peut, sans erreur sensible, supposer $T = T'$: ainsi ici a est très-approchant proportionnel à $\left(\frac{dA}{A}\right)$.

Mais $\frac{dA}{A}$, dans la sixième expérience, a été trouvé, pour un cercle de 62 millimètres de diamètre, égal à 0.0455; quantité dont il faut ôter la partie de $\frac{dA}{A}$, qui appartient, soit à l'imperfection de l'élasticité, soit à la résistance qu'éprouve l'extrémité du petit cylindre qui trempe dans l'huile, et qui nous a donné (cinquième expérience, art. 23) $\frac{dA}{A} = 0.022$. Ainsi, retranchant cette quantité de 0.0455, il restera pour $\frac{dA}{A}$, corrigé de l'imperfection élastique, etc. la quantité

$$\frac{dA}{A} = 0.0235.$$

Dans la septième expérience, en se servant d'un cercle de 101 millimètres, nous avons trouvé $\frac{dA}{A} = 0.183$, dont il faut, pour la correction, ôter 0.022 : ainsi il reste pour la quantité $\frac{dA}{A}$, due à la résistance d'un cercle de 101 millimètres de diamètre, 0.161.

Pour avoir, d'après ces deux dernieres expériences, le rapport des momens des résistances relativement au diamètre, il faut, dans la comparaison des deux expériences, en nommant x la puissance des diamètres qui correspondent au moment de la résistance, faire

$$\left(\frac{101}{62}\right)^x = \frac{161}{23}, \text{ d'où résulte } x = \frac{\log. 161 - \log. 23}{\log. 101 - \log. 62} = 3.9.$$

Ainsi, dans les expériences faites dans l'huile, nous trouvons, ainsi que dans l'eau, que le moment des résistances de deux cercles mus autour de leur centre, dans le plan de leur superficie, est comme la quatrième puissance de leur diamètre, résultat dont nous avons démontré (art. 28) la conformité avec la théorie.

L'accord de ces résultats ne laisse, ce me semble, aucun doute sur la certitude du terme proportionnel à la vîtesse dans la résistance des fluides.

Détermination du rapport des cohérences.

37. Nous avons trouvé (art. 27) pour un cercle de 119 millimètres de diamètre, oscillant dans l'eau autour de son centre, et faisant, comme les cercles qui oscilloient dans l'huile, à très-peu près 4 oscillations en 91″, que $\frac{dA}{A} = 0.0176$; et comme le moment des résistances de deux cercles mus dans le même fluide avec

le même degré de vîtesse, a été trouvé comme la quatrième puissance des diamètres des deux cercles, un cercle de 101 millimètres auroit donné dans l'eau $\frac{dA}{A} = 0.00914$.

Mais nous trouvons que le même cercle de 101 millimètres de diamètre, éprouve dans l'huile une résistance telle que $\frac{dA}{A} = 0.161$.

Ainsi, puisque le *moment des résistances est ici* proportionnel à $\frac{dA}{A}$, et que les cercles sont les mêmes, il paroît en résulter que la difficulté que le même plan, mu avec le même degré de vîtesse, éprouve à séparer *les molécules de l'huile, est à la difficulté qu'il éprouve* à séparer celle de l'eau, à peu près :: 17.5 : 1.

38. Avant de passer à un autre objet, je crois devoir parler ici de deux faits qui pourront jeter quelque jour sur la nature des fluides.

Je voulois savoir si, lorsqu'un corps est en mouvement dans un fluide, la nature de la surface influe sur la résistance. A cet effet j'ai enduit la surface d'un cercle de fer-blanc d'une couche de suif, que j'ai essuyée *en partie, pour qu'elle n'augmentât pas sensiblement* l'épaisseur du cercle; j'ai fait osciller ce cercle dans l'eau, de la même manière que dans toutes les expériences qui précèdent. J'ai observé avec soin la diminution successive des oscillations, et je l'ai trouvée exactement la même, pour les mêmes degrés d'amplitude d'oscillation, qu'avant que la surface eût été enduite de suif.

Sur l'enduit précédent j'ai répandu, au moyen d'un tamis, du grès en poussière, qui a adhéré à la surface, et j'ai trouvé une augmentation à peine sensible dans la résistance de la même surface.

Il paroît que l'on peut conclure de cette expérience, que la partie de la résistance que nous avons trouvée proportionnelle à la simple vîtesse, est due à l'adhérence des molécules du fluide entre elles, et non à l'adhérence de ces molécules avec la surface du corps. Quelle que soit en effet la nature du plan, il est parsemé d'une infinité d'inégalités où se logent fixément des molécules fluides.

39. J'ai voulu ensuite chercher si la pression plus ou moins grande du fluide sur un corps submergé augmentoit sa résistance.

J'avois d'abord essayé de faire osciller le corps sous l'eau, à deux profondeurs différentes; l'une de 2 centimètres, l'autre de 50, et je n'avois trouvé aucune différence dans les résistances; mais comme la surface de l'eau est chargée de tout le poids de l'atmosphère, et qu'un demi-mètre de plus dans cette charge ne peut pas produire des augmentations de résistance sensibles, j'ai employé un autre moyen qui me paroît décider la question.

Ayant placé un vase rempli d'eau sous le récipient, à tige et à collier de cuir, d'une machine pneumatique, j'attachois au crochet de la tige un fil de clavecin numéroté 7 dans le commerce; j'y suspendois un cylindre de cuivre qui plongeoit dans l'eau du vase, et sous ce cylindre je fixois un plan circulaire de 101 millimètres de diamètre. Lorsque les oscillations étoient finies, et par conséquent la force de torsion nulle, l'on marquoit, au moyen d'un index fixé au cylindre, et d'un point correspondant sur la cloche, le point qui répondoit à *o* de torsion.

L'on faisoit ensuite tourner rapidement la tige d'un cercle entier; ce qui donnoit au fil un cercle entier de torsion, et l'on observoit les diminutions successives des oscillations. Nous avons trouvé cette diminution, pour un cercle de torsion, à peu près d'un quart de cercle à la première oscillation, mais exactement la même, soit que l'expérience se fît dans le vide ou non. Une petite palette de 50 millimètres de longueur et de 10 millimètres de largeur, frappant l'eau perpendiculairement à son plan, a donné un résultat semblable.

L'on peut conclure de cette expérience, que lorsqu'un corps submergé se meut dans un fluide, la pression, ou la hauteur du fluide au-dessus du corps, n'augmente pas sensiblement sa résistance, et qu'ainsi la portion de cette résistance, proportionnelle à la vîtesse, ne peut en rien être comparée avec le frottement des corps solides, qui est toujours proportionnel à la pression.

L'expérience qui précède a été faite deux fois devant des témoins éclairés. La première, dans le cabinet de l'Institut, avec notre confrère le citoyen Lasuze, qui a bien voulu ensuite la répéter lui-même; la seconde, dans le cabinet de physique du citoyen Charles, notre confrère, aidé de ses conseils, et de la sagacité que tout le monde lui connoît dans l'art difficile des expériences.

De la résistance qu'éprouve un cylindre qui se meut d'un mouvement très-lent, perpendiculaire à son axe.

40. LORSQU'UN cylindre, quelque petit que soit son diamètre, se meut perpendiculairement à son axe, les molécules fluides frappées par le cylindre prennent nécessairement du mouvement, et il n'est pas possible, dans la réduction des expériences, de négliger la partie de la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse: ainsi je suis ici obligé de disposer les expériences de manière qu'elles puissent être calculées d'après les deux parties de la résistance, sous la forme prescrite art. 14.

41. Les trois cylindres qui vont successivement être soumis à l'expérience, ont 249 millimètres de longueur. On les fixe, par leur milieu, sous le cylindre; en sorte qu'ils forment deux rayons horizontaux de 124.5 millimètres chacun de longueur. J'ai déterminé le diamètre de ces cylindres par leur poids, dans toutes les expériences qui vont suivre.

Huitième expérience.

42. VOULANT dans cette expérience déterminer la résistance d'un cylindre très-fin, dont la circonférence, évaluée d'après son poids, étoit de 0.87 millimètres ou de $\frac{87}{100}$ d'un millimètre, j'ai fixé par leur milieu deux

de ces fils se recoupant en croix dans une situation horizontale: leur point de recoupement répond, sous le cylindre du disque, à son centre. L'on observe de suite deux oscillations, d'où l'on déduit l'amplitude moyenne d'une seule oscillation, et sa diminution; ce qui m'a donné pour les différens degrés de torsion ou d'amplitude d'oscillation qui vont être indiqués, les résultats suivans.

Amplitude au départ.	Perte d'amplitude pour une seule oscillation.
A 456^d du point o.	47^d0.
A 231	17^d0.
A 99	5^d3.

Ces observations me donnent, d'après la méthode décrite art. 14, ces trois égalités:

$$(1)\quad \frac{dA}{A} = m + 456.\, p = \frac{47}{456} = 0.1031;$$

$$(2)\quad \frac{dA}{A} = m + 231.\, p = \frac{17}{2} = 0.0736;$$

$$(3)\quad \frac{dA}{A} = m + 99.\, p = \frac{5.3}{99} = 0.0536.$$

Il faut tirer de ces trois équations la valeur des constantes m et p.

En comparant (1) et (3) l'on a $p = 0.000138$;

En comparant (1) et (2) l'on a $p = 0.000132$.

Ainsi l'on peut prendre pour valeur moyenne

$$p = 0.000135.$$

Substituant cette valeur de p dans la troisième équation, où le coefficient de p, étant le plus petit, doit moins altérer la valeur de m que dans les deux autres, nous trouverons $m = 0.0403$.

Mais l'imperfection de l'élasticité produisoit ici la même altération sur m que dans les premières expériences : ainsi cette altération étoit égale à 0.013.

Et par conséquent la valeur de m corrigée est égale à 0.0273.

Il faut remarquer que la valeur de p n'éprouve aucune altération, parce que cette altération étant proportionnelle à la vîtesse, ne peut influer que sur le terme qui est proportionnel à la vîtesse.

Comme dans cette expérience il y avoit deux fils en croix, les quantités qui expriment p et m pour un seul fil, n'ont que la moitié des valeurs précédentes : ainsi pour un seul fil de 249 millimètres de longueur et de $\frac{87}{100}$ de millimètre de circonférence, l'on a $p = 0.000067$, et $m = 0.0136$.

Neuvième expérience.

43. Un seul cylindre de cuivre est mis en expérience : il a, comme le précédent, 249 millimètres de longueur ; la circonférence est de 11.2 millimètres. Il fait, comme le précédent, 4 oscillations en 91″.

Comme l'on a observé avec assez de soin les oscillations successives de ce cylindre, je vais donner le détail de la méthode pratique que j'ai souvent suivie pour avoir des résultats moyens entre les amplitudes

des oscillations et leurs diminutions; d'où j'ai conclu m et p.

Cette méthode pratique consiste à observer successivement avec soin l'étendue des oscillations à droite et à gauche du point o : 4 oscillations de suite fixent l'étendue d'une oscillation moyenne; l'on prend ensuite le quart de la différence entre la somme des deux premières oscillations et des deux dernières, pour déterminer la différence moyenne.

Ainsi, par exemple, dans les observations qui vont suivre dans le n° 1, où les étendues des oscillations sont très-considérables, l'on a pu se contenter de deux observations pour déterminer les quantités $\left(\frac{dA}{A}\right)$; mais depuis le n° 2 jusqu'au n° 6 l'on a observé toutes les oscillations successives, et voici le type de leur réduction.

Le disque, au n° 2, part de 240 degrés à gauche du point o; il arrive à 218 degrés à droite de ce même point, retourne vers la gauche jusqu'à 191.5 degrés, et revient à droite à 177 degrés.

J'ai pour l'étendue moyenne A de l'amplitude d'une oscillation comptée du point o,

$$\frac{240 + 218 + 191.5 + 177}{4} = \frac{826.5}{4}.$$

La somme des deux premières observations, moins la somme des deux dernières, est $240 + 218 - 191.5 - 177$, quantité dont il faut prendre le quart pour avoir une différence moyenne.

Plus de précision seroit inutile dans ces sortes de recherches ; c'est en suivant cette méthode que j'ai formé les équations succesives qui vont suivre.

$$(1)\quad \frac{dA}{A} = \frac{83}{439} = 0.1891 = m + 439.0\,p;$$

$$(2)\;\ldots\ldots\; \frac{89.5}{826.5} = 0.1083 = m + 206.6\,p;$$

$$(3)\;\ldots\ldots\; \frac{63.9}{673.1} = 0.0949 = m + 168.3\,p;$$

$$(4)\;\ldots\ldots\; \frac{47.8}{561.2} = 0.0864 = m + 140.3\,p;$$

$$(5)\;\ldots\ldots\; \frac{37.3}{476} = 0.0784 = m + 119.0\,p;$$

$$(6)\;\ldots\ldots\; \frac{30.3}{408.3} = 0.0742 = m + 102.1\,p.$$

L'on remarquera que, d'après la méthode que nous avons suivie depuis la seconde jusqu'à la sixième équation, les numérateurs qui représentent les pertes sont quatre fois plus grands que les pertes moyennes d'une *seule oscillation, et que les diviseurs, qui représentent* l'étendue des oscillations, étant la somme de quatre observations, sont aussi quatre fois plus grands que l'étendue moyenne de l'oscillation. C'est ce qui fait que l'on a pris seulement le quart de ce diviseur pour le coefficient de p dans les équations qui précèdent.

Si, d'après ces différentes équations, qui résultent d'observations faites avec le plus grand soin, l'on compare les différens nos 1 entre eux, l'on aura :

N° 1, comparé avec n° 2, donne $p = 0.000348$;
N° 1 . . . . 3 . . . $p = 0.000349$;
N° 1 . . . . 4 . . . $p = 0.000344$;
N° 1 . . . . 5 . . . $p = 0.000346$;
N° 1 . . . . 6 . . . $p = 0.000341$.

Il seroit difficile, je crois, dans des expériences de ce genre, d'espérer des résultats plus d'accord les uns avec les autres. L'on aura d'après cela, pour valeur moyenne, $p = 0.000345$.

Ce nombre substitué dans la sixième équation, l'on aura $m = 0.039$; d'où ôtant, pour la correction, la quantité 0.013, l'on aura m corrigé $= 0.026$.

Dixième expérience.

44. Le cylindre a, comme les précédens, 249 millimètres de longueur ; sa circonférence est de 21.1 millimètres : il fait 4 oscillations en 92″, et est fixé en d par son milieu, comme les précédens, sous le centre du cylindre du disque.

Avec 425 degrés d'amplitude d'oscillation, depuis *o* de torsion, là perte, dans une oscillation, est . . . . $129^{d}0$;
Avec 220 . . . . $41^{d}0$;
Avec $102^{d}5$ . . . . $11^{d}5$.

D'après ces trois observations, l'on a les trois équations suivantes :

$$(1)\quad \frac{dA}{A} = \frac{129}{425} = 0.3035 = m + 425.0\,p;$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ \frac{41}{220} = 0.1864 = m + 220.0\,p;$$

$$(3)\ \ldots\ \frac{11.5}{102.5} = 0.1123 = m + 102.5\,p.$$

En comparant 1 et 2, l'on a $p = 0.00059$;
En comparant 1 et 3, l'on a $p = 0.00057$:
Ainsi la valeur moyenne de p est . 0.00058.

Substituant cette valeur de p dans la troisième équation, l'on aura $m = 0.053$; d'où ôtant 0.013 pour la correction d'élasticité, il reste $m = 0.040$.

45. Pour comparer, d'après les trois expériences qui précèdent, les valeurs de m et de p relativement aux diamètres, ou, ce qui revient au même, aux circonférences, les largeurs des cylindres étant les mêmes dans les trois dernières expériences, et le temps des oscillations ne différant que de $\frac{1}{92}$ pour le plus gros cylindre, je les réunis dans le tableau suivant.

Cylindre.	Circonférence.		
1	21^m1	$m = 0.0400$	$p = 0.00058$
2	11^m2	$m = 0.0260$	$p = 0.00034$
3	0^m87	$m = 0.0136$	$p = 0.000067$

En examinant ce tableau il est facile de voir que les quantités m, qui répondent aux différens cylindres, ne sont pas entre elles dans le même rapport que les circonférences des cylindres.

La circonférence du cylindre n° 1 est à celle du cylindre n° 3, comme 21.10 : 0.87, à peu près :: 24 : 1; tandis que les quantités m, qui représentent les rapports des résistances, sont entre elles :: 400 : 136, à peu près comme 3 est à 1.

La comparaison du n° 1 avec le n° 2 donne la même conséquence.

L'on peut soupçonner, pour expliquer ce résultat, que la cohérence entraîne latéralement au cylindre une petite portion du fluide dont toutes les molécules se détachent. Les molécules qui touchent immédiatement le cylindre, prennent la même vîtesse que le cylindre; mais les parties latérales un peu plus éloignées prennent une plus petite vîtesse, et à une distance latérale de deux ou trois millimètres la vîtesse cesse en entier: c'est seulement dans ce dernier point que la cohérence cesse d'influer sur la résistance.

D'après cette supposition, qui a cependant besoin d'être confirmée, l'on approcheroit peut-être de la vérité en augmentant d'une quantité constante le diamètre de tous les cylindres, avant de les comparer avec leur résistance. Consultons ici nos expériences. Soit x la quantité dont nous supposons qu'il faille augmenter la circonférence de chaque cylindre, pour que les résistances soient proportionnelles aux diamètres augmentés de cette quantité.

Nous aurons, en comparant

N^{os} 1 et 3; $21.1 + x : 0.87 + x :: 400 : 136$;
N^{os} 2 et 3; $11.2 + x : 0.87 + x :: 260 : 136$.

La première comparaison donne . $x = 8.92$;
La seconde . . . . $x = 10.45$.

Ainsi l'augmentation constante x de la circonférence des cylindres, due à la cohérence du fluide, sera égale moyennement à 9.68 millimètres; c'est-à-dire que la portion de molécules fluides, détachées l'une de l'autre par le cylindre en mouvement, s'étendroit à peu près jusqu'à 1.5 millimètre des deux côtés de tous les cylindres; ce qui augmente leur diamètre à peu près de 3 millimètres.

46. Si l'on compare actuellement les quantités p, dues à l'inertie du fluide, avec les diamètres des cylindres, l'on verra également que ces quantités, dans les petits cylindres, sont plus grandes qu'elles ne devroient être respectivement aux diamètres, mais dans un rapport beaucoup moins grand que celui relatif à la partie de la résistance due à la simple vitesse.

Si, par exemple, pour faire cette comparaison entre le cylindre de 21.1 millimètres de circonférence et celui 0.87 millimètres, l'on augmente les deux circonférences d'une quantité y, l'on aura, pour déterminer y, le rapport $21.1 + y : 0.87 + y :: 580 : 67$; d'où l'on tire, pour l'augmentation constante des circonférences, $y = 1.77$ millimètre, quantité qui n'est guère que la cinquième partie de celle que nous venons de trouver pour x.

47. Il seroit facile, d'après la théorie que nous établissons, de rendre raison de cette différence. Toutes les molécules du fluide, lorsqu'elles sont détachées l'une de l'autre, opposent, quelle que soit la vîtesse qu'elles prennent, la même résistance : ainsi, comme la valeur de la quantité m dépend uniquement de la cohérence, la résistance due à cette cohérence s'étendra jusqu'au point où la vîtesse des molécules du fluide est o.

Dans la comparaison des quantités p, toutes les molécules sont supposées prendre une vîtesse égale à celle du cylindre; mais comme il n'y a que les molécules fluides qui touchent immédiatement le cylindre, qui prennent cette vîtesse, il en résulte qu'il faut donner à l'augmentation du diamètre, en déterminant la valeur de p, qui répond au carré de la vîtesse, une moindre étendue qu'en évaluant le terme m, qui dépend de la cohérence. Au surplus, ces différens degrés de vîtesse latérale doivent suivre, depuis le point de contact avec le cylindre, où la vîtesse est égale à celle du cylindre, jusqu'au point où la cohérence les rend nulles, des lois que des observations nouvelles pourront peut-être bientôt déterminer, et qui jetteront un grand jour sur cette partie intéressante de la physique.

48. En déterminant par l'expérience la partie du moment de la résistance proportionnelle à la vîtesse, dans deux cylindres d'un même diamètre, mais de différente longueur, l'on trouve le moment de la résistance

proportionnel à la troisième puissance des diamètres. La théorie annonce ce résultat; car, en supposant chaque cylindre divisé en un même nombre de parties, la longueur de chaque partie sera proportionnelle à la longueur totale. La vîtesse des parties correspondantes sera comme les mêmes longueurs, ainsi que la distance de ces parties au centre de rotation.

La même théorie donne la partie du moment de la résistance, dépendante du carré de la vîtesse, dans deux cylindres du même diamètre, mais de longueurs différentes, proportionnelle à la quatrième puissance de la longueur du cylindre.

Valeur effective de la partie de la résistance proportionnelle à la simple vîtesse.

49. Je me servirai, pour former un module de comparaison, de la neuvième expérience (art. 43), parce que, d'après l'accord des détails que j'ai rapportés en rendant compte de cette expérience, il paroît difficile qu'il se trouve dans les quantités moyennes des erreurs sensibles.

Dans cette expérience, le cylindre est fixé sous le centre de rotation par son milieu; sa longueur totale est de 249 millimètres : ainsi l'on doit calculer la résistance de son moment comme celle de deux cylindres de 124.5 millimètres, fixés au centre de rotation par leur extrémité.

L'on remarquera, pour simplifier le calcul, que le moment d'inertie du cylindre est si peu considérable, relativement au moment d'inertie du disque, que le temps des oscillations est sensiblement le même que si le disque étoit seul.

Nous trouvons ici, par l'expérience (art. 43), pour la valeur de m corrigée, 0.026 : nous avons vu (art. 14) que $m = \frac{acT}{4nT'}\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$; d'après l'observation que nous venons de faire, $T' = T$: ainsi la formule qu'il faut comparer avec la valeur numérique de m, est $\frac{aC}{4n}\left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$; et par conséquent $a = \frac{4nm}{C}\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$, et $au = \frac{4nm}{C}\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} u$.

Mais au est égal au moment de la résistance du cylindre tournant, avec la vîtesse angulaire u, dans le fluide, autour du point qui partage ce cylindre en deux parties égales. Nous venons de trouver par l'expérience, $m = 0.026$; n représente le moment de la force de torsion du fil de suspension, que nous avons trouvée (art. 30) égale à 17.9 grammes, attaché à un levier d'un millimètre. C est le rapport de la circonférence au rayon. Nous prenons $\frac{44}{7}$ pour la valeur approchée de ce rapport; l est la longueur du pendule qui bat ses oscillations dans le même temps que la force de torsion fait osciller le disque; mais l'expérience nous a donné 4 oscillations en 91″. Ainsi, puisque le pendule qui bat les secondes a été trouvé, par des observations très-exactes, égal à 994 millimètres, $l = 994\left(\frac{91}{4}\right)^2$; quantité qui représente des millimètres. g, dans la formule, représente la force de la gravité.

Substituant ces valeurs numériques dans la valeur de au, nous aurons

$$au = \frac{4\ (17.9)\ (0.026)\ (7)\ (91)}{4\ (44)} \left(\frac{994}{g}\right)^{\frac{1}{2}} u.$$

Mais comme u représente une vîtesse angulaire, il faut multiplier et diviser le second membre de cette équation par 124.5 millimètres, moitié de la longueur du cylindre : ce qui donne $124.5\ u$, qui représentera la vîtesse de l'extrémité du cylindre dans notre expérience. Et si nous supposons V la hauteur dont un corps en tombant acquerroit cette vîtesse $124.5\ u$, nous aurons $124.5\ u = \sqrt{2\, g V}$: d'où résulte par conséquent

$$au = \frac{17.9 \times 0.026 \times 7 \times 91\ \sqrt{1988}}{44 \cdot 124.5} \sqrt{V} = 2.41 \sqrt{V}.$$

Ainsi, si la chûte $\sqrt{V}$ étoit égale à un millimètre, c'est-à-dire, si l'extrémité de la verge avoit une vîtesse due à une chûte d'un millimètre de hauteur, auquel cas, comme nous l'avons vu (art. 31), la vîtesse correspondante est de 14 centimètres par seconde ; le moment de la résistance auroit été égal à un poids de 2.41 grammes, attaché à un bras de levier d'un millimètre de longueur.

50. Nous allons à présent déduire de cette valeur la résistance directe qu'éprouveroit un cylindre ayant un mouvement parallèle à lui-même et perpendiculaire à son axe.

Ca (*fig.* 3) représente la moitié de la longueur du cylindre *mu autour du point* C; δ est une quantité constante dépendante de la cohérence du fluide et du diamètre du cylindre : $Cn = r$, $nn' = dr$. La vîtesse angulaire étant u, le moment de la résistance proportionnelle à la vîtesse qu'éprouveroit le petit élément nn', seroit représenté par $\delta r\, dr\, ru$, dont l'intégrale, pour la longueur entière $Cb = R$ de la moitié du cylindre, sera $\frac{\delta R^3 . u}{3}$. Le moment de la résistance des deux parties du cylindre donnera par conséquent

$$\frac{2\,\delta R^3 . u}{3} = 2.41 \sqrt{V}.$$

Mais $2\,\delta RRu$ est la résistance directe du cylindre mu parallèlement à lui-même et perpendiculairement à son axe. Ainsi, puisque $A = 124{,}5$ millimètres, cette résistance directe sera égale à

$$\frac{7.23}{124.5} \sqrt{V} = 0^g 058 \sqrt{V};$$

et si V est égal à un millimètre, auquel cas la vîtesse du cylindre seroit de 14 centimètres par seconde, la résistance du cylindre seroit de58 milligrammes ; et pour une vîtesse d'un centimètre par seconde, vîtesse plus considérable que la vîtesse moyenne qui a eu lieu dans la plupart de nos expériences, la résistance qu'éprouveroit le cylindre seroit 0.00414 gramme, un peu plus de 4 milligrammes.

D'où il est facile de conclure que la résistance d'un cylindre de même diamètre, mais d'un mètre de longueur, mu parallèlement à lui-même avec une vîtesse d'un centimètre par seconde, seroit de

$$0.00414\left(\frac{1000}{249}\right)=0.0166,$$

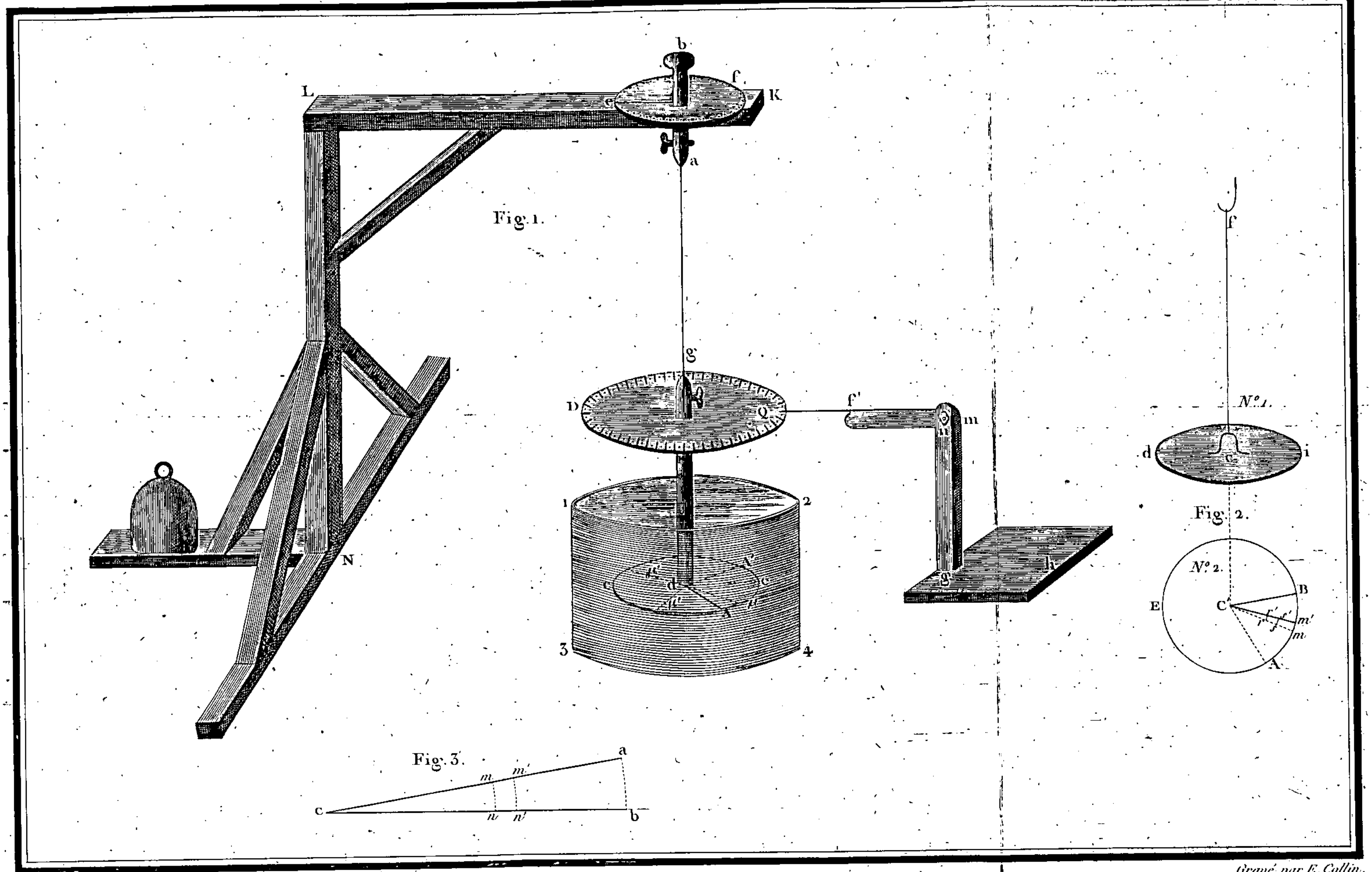
un peu plus de 16 milligrammes.

51. Dans la même huile où j'avois fait osciller les plans, et au même degré de température, j'ai mis en oscillation les cylindres qui précèdent, ou des cylindres plus courts lorsque la résistance étoit trop considérable, et j'ai trouvé, conformément aux résultats que j'avois eus dans les expériences de comparaison faites avec les plans, que la cohérence de l'huile étoit à celle de l'eau dans le rapport de 17 à 1. Il faut remarquer que lorsqu'on veut seulement déterminer par les expériences le terme de la résistance dû à la simple vîtesse, il y a de l'avantage à préférer les fluides cohérens, tels que l'huile, à l'eau; parce que pour lors, dans les petits degrés de vîtesse, le terme proportionnel au carré de la vîtesse, comparé avec celui qui est proportionnel à la vîtesse, disparoît presque en entier.

J'ai encore éprouvé, en faisant osciller des cylindres dans l'huile, un effet auquel je ne m'attendois pas: c'est que, quoique la cohérence de l'huile soit à celle de l'eau comme 17 est à 1; cependant, si l'on compare la résistance proportionnelle à la vîtesse de deux cylindres très-différens, comme seroient, par exemple, un cylindre de 11.2 de tour, avec un cylindre de 0.87 millimètres, l'on trouvera dans cette comparaison que, pour que les résistances soient proportionnelles aux diamètres, il faut, dans l'huile comme dans l'eau, augmenter les diamètres à peu près de 3 millimètres. J'avoue que j'avois d'abord cru que la cohérence étant plus considérable dans l'huile que dans l'eau, je devois y trouver cette augmentation du diamètre beaucoup plus grande. Cependant il me reste peu de doute sur cette conséquence tirée des expériences; l'huile m'ayant toujours donné, pour la portion de résistance proportionnelle à la vîtesse, des résultats encore plus conformes entre eux que ceux que m'avoient donnés les expériences faites dans l'eau.

53. Une seconde observation qu'il est peut-être beaucoup plus facile d'expliquer, c'est que lorsque le même cylindre se meut dans l'huile et dans l'eau avec un même degré de vîtesse, la partie de la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse, et produite par l'*inertie des molécules fluides* que le cylindre met en mouvement, est presque la même dans les deux fluides. L'on voit que cette partie de la résistance dépend de la quantité de molécules fluides en mouvement, et non de leur cohérence : ainsi les résistances dues à l'inertie doivent être entre elles, dans différens fluides, proportionnelles à la densité des fluides.

Dans un second mémoire je déterminerai numériquement la valeur de la partie de la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse; je chercherai aussi quelle est, dans cette espèce de mouvement, la résistance des globes, des palettes, des surfaces concaves et



Gravé par E. Collin.

convexes, et la différence que l'on trouve entre la résistance qu'éprouve un corps entièrement submergé dans un fluide, et le même corps à flottaison : mais je puis avertir d'avance que, dans les mouvemens très-lents, la résistance des corps qui ne sont pas entièrement submergés, est beaucoup plus considérable que celle des corps submergés.