
R E C H E R C H E S
THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Sur la force de torsion , & sur l'élasticité des fils de métal : Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les Arts & dans différentes expériences de Physique : Construction de différentes balances de torsion , pour mesurer les plus petits degrés de force. Observations sur les loix de l'élasticité & de la cohérence.

Par M. C O U L O M B.

I.

C E Mémoire a deux objets ; le premier , de déterminer la force élastique de torsion des fils de fer & de laiton , relativement à leur longueur , à leur grosseur , & à leur degré de tension. J'avois déjà eu besoin , dans un Mémoire sur les Aiguilles aimantées , imprimé dans le neuvième volume des *Savans étrangers* , de déterminer la force de torsion des cheveux & des soies ; mais je ne m'étois point occupé des fils de métal , parce que l'objet utile à mes recherches , n'étoit pour lors que de choisir , à forces égales , les suspensions les plus flexibles , & que j'avois trouvé que les fils de soie avoient incomparablement plus de flexibilité que les fils de métal. Le second objet de ce Mémoire , est d'évaluer l'imperfection de la réaction élastique des fils de métal , & d'examiner quelles sont les conséquences que l'on en peut tirer , relativement aux loix de la cohérence & de l'élasticité des corps.

Lû
en 1784.

I I.

LA méthode pour déterminer la force de torsion, d'après l'expérience, consiste à suspendre par un fil de métal, un poids cylindrique, de manière que son axe soit vertical ou dans la direction du fil de suspension. Tant que le fil de suspension ne sera point tordu, le poids restera en repos; mais si l'on fait tourner ce poids autour de son axe, le fil se tordra, & fera effort pour se rétablir dans la situation naturelle; si pour lors l'on abandonne le poids, il oscillera plus ou moins de temps, suivant que la réaction élastique de torsion sera plus ou moins parfaite. Si dans ce genre d'expérience, l'on observe avec soin la durée d'un certain nombre d'oscillations, il sera facile de déterminer, par les formules du mouvement oscillatoire, la force de réaction de torsion qui produit ces oscillations. Ainsi, en faisant varier la pesanteur du poids suspendu, la longueur des fils de suspension, & leur grosseur, l'on peut espérer de déterminer les loix de la réaction de torsion, relativement à la tension, à la longueur, à la grosseur, & à la nature de ces fils.

I I I.

SI le fil de métal étoit parfaitement élastique, si la résistance de l'air n'altéroit pas l'amplitude des oscillations, le poids soutenu par le fil de métal, une fois en mouvement, oscilleroit jusqu'à ce qu'on l'arrêtât. La diminution des amplitudes des oscillations ne peut donc être attribuée qu'à la résistance de l'air, & qu'à l'imperfection de l'élasticité de torsion; ainsi, en observant la diminution successive de l'amplitude de chaque oscillation, & en retranchant la partie de l'altération qu'il faut attribuer à la résistance de l'air, l'on pourra, au moyen des formules du mouvement oscillatoire, appliquées à ces expériences, déterminer suivant quelles loix cette force élastique de torsion est altérée.

I V.

CE Mémoire sera divisé en deux sections; dans la première, l'on déterminera la loi des forces de torsion, en supposant les forces de torsion proportionnelles à l'angle de torsion, supposition conforme à l'expérience, lorsque l'on ne donne pas une trop grande amplitude à l'angle de torsion: l'on donnera quelques applications de cette théorie à la pratique.

Dans la seconde section, l'on cherchera, par l'expérience, suivant quelles loix la force élastique de torsion est altérée dans les grandes oscillations: l'on fera usage de cette recherche pour déterminer les loix de la cohérence & de l'élasticité des métaux & de tous les corps solides.

- V.

SECTION PREMIÈRE.

Formules du mouvement oscillatoire, en supposant la réaction de la force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, ou altérée par un terme très-petit.

UN corps cylindrique B (fig. I, n.^o 1) est soutenu par un fil RC , de manière que l'axe du cylindre est vertical, ou se trouve dans la prolongation du fil de suspension; l'on fait tourner ce cylindre autour de son axe, sans déranger cet axe de son à-plomb: il faut déterminer, dans la supposition des forces de torsion proportionnelles à l'angle de torsion, les formules du mouvement oscillatoire.

Le n.^o 2, fig. I, représente une section horizontale du cylindre; tous les élémens du cylindre sont projetés sur cette section circulaire en π , π' , π'' , &c. l'on suppose que l'angle primitif de torsion soit $ACM = A$, & qu'après le temps t , cet angle soit ACm , ou qu'il soit diminué de l'angle $MCm = S$, en sorte que $ACm = (A - S)$.

Puisque l'on suppose la force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, le *momentum* de cette force sera

représenté par $n(A - S)$, n étant un coefficient constant, dont la valeur dépendra de la nature du fil de métal, de sa longueur & de sa grosseur. Si l'on nomme v la vitesse d'un point quelconque π , au bout du temps t , lorsque l'angle de torsion est ACm , l'on aura, par les principes de Dynamique,

$$n(A - S) dt = \int \pi r dv,$$

où r est la distance $C\pi$ du point π à l'axe de rotation G .

Mais si le rayon CA' du poids cylindrique $= a$, & que la vitesse d'un point A' de la circonférence du cylindre, soit au bout du temps t , représentée par u , l'on aura

$$v = \frac{ru}{a}; \text{ d'où résulte}$$

$$n(A - S) dt = du \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& comme $dt = \frac{a dS}{u}$, l'on aura pour l'équation intégrée

$$n(2AS - SS) = uu \int \frac{\pi r^2}{a^2},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{dS \int (\pi r^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n} \sqrt{(2AS - SS)}}.$$

Mais $\frac{dS}{\sqrt{(2AS - SS)}}$ représente un angle dont A est le rayon & S le sinus verse, qui s'évanouit lorsque $S = 0$, & qui devient égal à 90 degrés lorsque $S = A$.

Ainsi le temps d'une oscillation entière sera

$$T = \left(\int \frac{\pi r^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} 180^d.$$

V I.

POUR comparer la force de torsion avec la force de la gravité dans un pendule, il faut se ressouvenir que dans le

le pendule, le temps T d'une oscillation entière

$$= \left(\frac{\lambda}{g} \right)^{\frac{1}{2}} 180^d,$$

où λ est la longueur du pendule, & g la force de gravité. Ainsi un pendule isochrone aux oscillations du cylindre, donne

$$\int \frac{\pi r^2}{n} = \frac{\lambda}{g};$$

de cette formule, l'on tirera facilement la valeur de n , d'après l'expérience, puisque les dimensions du cylindre ou du poids sont données, ainsi que le temps d'une oscillation qui détermine la valeur λ .

Si l'on vouloit ensuite chercher un poids Q , qui, agissant à l'extrémité du levier b , eût un *momentum* égal au *momentum* de la force de torsion, lorsque l'angle de torsion est $(A - S)$, il faudroit faire $Q b = n (A - S)$.

V I I.

IL faut actuellement chercher, pour un cylindre, la valeur de $\int \pi r^2$, que l'on trouvera égale à $\frac{\phi \delta L \cdot a^2}{4}$, où ϕ est le rapport de la circonférence au rayon, δ est la densité du cylindre & a son rayon. Mais comme la masse M du cylindre $= \frac{\phi \delta L a^2}{2}$, l'on a $\int \pi r^2 = \frac{M a^2}{2}$, & conséquemment $T = \left(\frac{M a^2}{2 n} \right)^{\frac{1}{2}} 180^d$: en comparant, comme à l'article précédent, avec le pendule isochrone, il en résulte $\frac{\lambda}{g} = \frac{M a^2}{2 n}$, & comme $g M$ est le poids P du cylindre, nous aurons $n = \frac{P a^2}{2 \lambda}$; ce qui donne une formule très-simple pour déterminer n d'après l'expérience.

Mém. 1784.

G g

V I I I.

Si la force de torsion, que nous avons supposée $n(A - S)$, étoit altérée par une quantité R , la formule du mouvement oscillatoire donneroit pour lors

$$[n(A - S) - R] \partial t = \partial u \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& mettant comme plus haut, à la place de ∂t , la valeur $\frac{a dS}{u}$, l'on a pour l'intégration

$$n(2AS - SS) - 2 \int R dS = uu \int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Si l'on veut étendre cette intégration à une oscillation entière, il faut la diviser en deux parties, la première depuis M jusqu'en A , où la force de torsion accélère la vitesse u , tandis que la force retardatrice la diminue; la deuxième depuis A jusqu'en M , où toutes les forces concourent à retarder le mouvement.

EXEMPLE I.^{er} Supposons $R = \mu(A - S)^m$, l'on aura, pour l'état de mouvement dans la première portion MA ,

$$n(2AS - SS) + \frac{2\mu(A - S)^{m+1}}{m+1} - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = uu \int \frac{\pi r^2}{aa};$$

ainsi, lorsque l'angle de torsion sera nul, ou que $(A - S) = 0$, l'on aura

$$nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = UU \int \frac{\pi r^2}{aa};$$

Considérons actuellement l'autre partie du mouvement depuis A jusqu'en M' , & supposons l'angle $AGM' = S'$, nous trouverons, en nommant U la vitesse au point A ;

$$\frac{nS'^2}{2} + \frac{\mu S'^{m+1}}{m+1} = \frac{UU - uu}{2} \int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Substituant à la place de U^2 la valeur

$$\left(\frac{n A^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1}}{\int \frac{\pi r^2}{a^2}} \right),$$

l'on aura pour l'intégration totale, lorsque la vitesse deviendra nulle, ou lorsque l'oscillation sera achevée,

$$(A - S') = \frac{2\mu}{n(m+1)} \frac{(A^{m+1} + S'^{m+1})}{A + S'};$$

& si les forces retardatrices sont telles qu'à chaque oscillation, l'amplitude soit peu diminuée, l'on aura, pour valeur très-approchée de $(A - S')$,

$$(A - S') = \frac{2\mu A^m}{n(m+1)};$$

& si cette quantité $(A - S')$ étoit assez petite pour être traitée comme une différentielle ordinaire, l'on auroit pour lors, pour un nombre Z d'oscillations,

$$\frac{2\mu}{n(m+1)} Z = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{S^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}} \right),$$

où S représente ce que devient A après un nombre d'oscillations Z . Ainsi l'on aura

$$S = \frac{1}{\left[\frac{2\mu \cdot m-1}{n(m+1)} Z + \frac{1}{A^{m-1}} \right] \frac{1}{m-1}},$$

qui détermine la valeur de S , après un nombre quelconque Z d'oscillations.

EXEMPLE II. Si

$$R = \mu (A - S)^m + \mu' (A - S)^{m'},$$

μ' & m' ayant d'autres valeurs que μ & m , l'on aura, en suivant le procédé du dernier exemple,

$$n(A - S) = \frac{2\mu}{m+1} \left(\frac{A^{m+1} + S^{m+1}}{A + S} \right) + \frac{2\mu'}{m'+1} \left(\frac{A^{m'+1} + S^{m'+1}}{A + S} \right);$$

G g ij

& si la force retardatrice est beaucoup moindre que la force de torsion, l'on aura pour valeur approchée,

$$n(A - S) = 2\mu \frac{A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1}.$$

En général, si

$$R = \mu(A - S)^m + \mu'(A - S)^{m'} + \mu''(A - S)^{m''} + \&c.$$

l'on aura toujours pour une oscillation, en supposant R beaucoup plus petit que la force de torsion,

$$n(A - S) = \frac{2\mu A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1} + \frac{2\mu'' A^{m''}}{m''+1} + \&c.$$

I X.

Expériences pour déterminer les loix de la force de torsion.

Préparation.

SUR une petite planche KA , soutenue par quatre pieds, s'élève une potence ABD : le poteau montant AB , a quatre pieds de hauteur, la traverse horizontale DE , glisse le long du montant, & se fixe au moyen d'une vis E : le cylindre ou le poids P , porte dans sa partie supérieure, dans la prolongation de son axe, un bout d'aiguille b , fixée à ce cylindre. Cette aiguille est saisie par la partie inférieure d'une double pince a , qui se serre par des vis; la partie supérieure de cette pince saisit l'extrémité inférieure du fil de suspension; la partie inférieure de cette même pince saisit l'extrémité de l'aiguille fixée au cylindre. L'extrémité supérieure du fil de suspension est prise par une autre pince g , attachée à la traverse DE . Sur la planche AK , qui sert de base à l'appareil, l'on pose un cercle divisé en degrés, dont le centre C doit être placé dans la prolongation de l'axe du cylindre: l'on attache au-dessous du cylindre un index eo , dont l'extrémité o réponde aux divisions du cercle.

X,

Expériences sur la torsion des fils de fer.

J'AI pris trois fils de clavecin, tels qu'on les trouve répandus dans le commerce, roulés sur des bobines, & numérotés.

Le fil de fer, n.^o 12, supporte, avant de se rompre, 3 livres 12 onces; les six pieds de longueur pèsent 5 grains.

Le fil de fer, n.^o 7, supporte, avant de se rompre, un poids de 10 livres; les six pieds de longueur pèsent 14 grains.

Le fil de fer, n.^o 1, casse sous une tension de 33 livres; les six pieds de longueur pèsent 56 grains.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.^o 12, le cylindre pesant une demi-livre.

L'ON a pris un cylindre de plomb pesant une demi-livre, que l'on a suspendu au fil de fer, n.^o 12; ce cylindre avoit 19 lignes de diamètre & 6 lignes $\frac{1}{2}$ de hauteur; le fil de suspension avoit 9 lignes de longueur. L'on a fait tourner le cylindre autour de son axe, sans déranger cet axe de son à-plomb, & l'on a eu les résultats suivans:

Premier essai. Lorsque l'on fait tourner le cylindre autour de son axe, d'un angle plus petit que 180 degrés, il fait vingt oscillations sensiblement isochrones en... 120".

Deuxième essai. Mais en tordant de trois cercles, les dix premières oscillations ont été de 2 à 3 secondes plus longues que les dix premières; & après les dix premières oscillations, l'amplitude des oscillations, qui étoit d'abord de trois cercles, se trouvoit réduite à cinq quarts de cercle.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.^o 12, cylindre pesant 2 livres.

Premier essai. En suspendant au même fil de fer, n.^o 12,

238 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

un cylindre qui pesoit 2 livres, ayant le même diamètre que le précédent, mais 26 lignes de hauteur, l'on a eu, pour un angle de torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en... 242".

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.º 7, cylindre pesant une demi-livre.

Premier essai. En suspendant au fil de fer, n.º 7, le cylindre d'une demi-livre, l'on a eu, pour une torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 42".

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.º 7, cylindre pesant 2 livres

Essai. En suspendant au même fil un poids de 2 livres, les vingt oscillations ont été achevées en..... 85".

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.º 1, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. Lorsque l'on suspend à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de demi-livre, sa roideur est si considérable, que ce poids n'est pas suffisant pour le redresser; en sorte que les oscillations sont très-irrégulières, parce qu'elles dépendent, non-seulement de l'angle de torsion, mais encore de la courbure que le fil de fer conserve en sortant de dessus la bobine, quoiqu'il soit tendu par un poids de demi-livre.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer n.º 1, cylindre pesant 2 livres.

Essai. Mais en suspendant à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de deux livres, le fil est sensi-

blement redressé, & l'on a, pour un angle de torsion de 45 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 23".

Continuation des Expériences.

Fils de laiton.

L'on a pris trois fils de laiton, correspondans par le numéro & à peu près par la grosseur, aux trois fils de fer que l'on vient de soumettre aux expériences.

Le fil de laiton, n.^o 12, portoit, au moment de sa rupture, 2 livres 3 onces: les six pieds de longueur pèsent 5 grains.

Le fil de laiton, n.^o 7, portoit, au moment de sa rupture, 14 livres: les six pieds de longueur pèsent 18 grains $\frac{1}{2}$.

Le fil de laiton, n.^o 1, casse sous une tension de 22 livres: les six pieds de longueur pèsent 66 grains.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton n.^o 12, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. La longueur du fil de suspension étoit de 9 pouces, comme dans les expériences qui précèdent; l'on y a suspendu le cylindre pesant une demi-livre, & l'on a eu pour un angle de torsion de 360 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 220".

Mais avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré 225 secondes; & après ces vingt premières oscillations, l'angle de torsion étoit encore de deux cercles à peu-près.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.^o 12, cylindre pesant deux livres.

Essai. Le fil de suspension étant de 9 pouces, & le cylindre pesant 2 livres, l'on a eu pour un angle de 360 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement

240 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

isochrones en..... 442".

Avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré à peu-près 444 secondes, & l'angle primitif de torsion s'est trouvé réduit à deux cercles un quart.

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 57".

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, cylindre pesant 2 livres.

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 110".

Mais l'angle primitif de torsion étant de deux circonférences de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 111 secondes, & l'angle primitif de torsion qui étoit de deux circonférences, s'est trouvé réduit à une circonférence & demie.

ONZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. Sous une tension d'une demi-livre, le fil de suspension n'est pas entièrement redressé, & le temps des oscillations, dépendant en partie de la courbure primitive, est incertain.

DOUZIÈME

DOUZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.º 1, cylindre pesant 2 livres.

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 50 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 32".

Mais l'angle primitif de torsion étant de cinq quarts de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 33 secondes $\frac{1}{2}$; & au bout de ces oscillations, l'angle primitif étoit réduit à un quart de cercle.

TREIZIÈME EXPÉRIENCE

Fil de laiton, n.º 7, cylindre pesant 2 livres.

Essai. La longueur des fils de suspension dans toutes les expériences précédentes, étoit de 9 pouces: comme l'on avoit besoin de déterminer la force de torsion, relativement à la longueur des fils, l'on a donné 36 pouces de longueur à la suspension de cette expérience, & l'on a eu jusqu'à trois cercles de torsion & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en..... 222".

X I.

Résultat des Expériences qui précèdent.

LA force ou la réaction de la torsion des fils de métal, doit être relative à leur longueur, à leur grosseur, à leur tension. Ainsi, pour pouvoir déterminer généralement la loi de cette réaction, nous avons été obligés, dans les expériences qui précèdent, de suspendre différens poids à des fils de fer & de laiton, de grosseur & de longueur différentes: voici les résultats que ces expériences présentent.

Si l'on fait tourner autour de son axe le cylindre, sans

Mém. 1784.

Hh

déranger cet axe de la ligne verticale, ce fil se tordra : lorsque l'on abandonnera le cylindre, le fil par sa force de réaction, fera effort pour reprendre sa situation naturelle; cet effort fera osciller le cylindre autour de cet axe, plus ou moins de temps, suivant que la force élastique sera plus ou moins parfaite.

Mais nous trouvons, par toutes les expériences qui précèdent, que lorsque l'angle de torsion n'est pas très-considérable, le temps des oscillations est sensiblement isochrone; ainsi nous pouvons regarder comme une première loi, que pour tous les fils de métal, lorsque les angles de torsion ne sont pas très-grands, la force de torsion est sensiblement proportionnelle à l'angle de torsion.

Ayant trouvé par l'expérience, que la force de réaction de torsion est proportionnelle à l'angle de torsion, il en résulte que toutes les formules oscillatoires que nous avons données, *articles IV & suivans*, d'après la supposition d'une force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, ou altérée par un terme très-petit, peuvent être appliquées à ces expériences.

Ainsi, comme nous avons eu, *article VII*, au moyen de ces formules $T = \left(\frac{Ma^2}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 180$ degrés, & que dans toutes les expériences qui précèdent, les cylindres de demi-livre & de 2 livres avoient le même diamètre, il en résulte que n doit être toujours proportionnel à $\left(\frac{M}{T^2} \right)$.

Ainsi, si la tension plus ou moins grande du fil, n'a point d'influence sur la force de torsion, pour lors la quantité n pour un même fil, sera la même dans une tension de demi-livre & une tension de 2 livres, & par conséquent l'on aura T proportionnel à $M^{\frac{1}{2}}$. Comparons nos expériences faites avec deux poids, l'un d'une demi-livre, l'autre de 2 livres, dont les racines sont comme 1 est à 2.

Première expérience. Le fil de fer, n.^o 12, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en . . . 120".

Deuxième expérience. Le même fil, tendu par un poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 242".

Troisième expérience. Fil de fer, n.^o 7, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en 43".

Quatrième expérience. Fil de fer, n.^o 7, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 85".

La cinquième expérience ne peut pas se comparer avec la sixième.

Septième expérience. Fil de laiton, n.^o 12, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en . . . 220".

Huitième expérience. Fil de laiton, n.^o 12, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en . . . 442".

Neuvième expérience. Fil de laiton, n.^o 7, chargé du poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en . . . 57".

Dixième expérience. Fil de laiton, n.^o 7, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 110".

La onzième & la douzième expériences ne peuvent pas être comparées entr'elles.

Il résulte donc de toutes ces expériences, qu'avec le même fil de métal, un poids de deux livres fait sensiblement ses oscillations dans un temps double de celui où un poids d'une demi-livre fait ses oscillations; que par conséquent la durée des oscillations est comme la racine des poids; qu'ainsi la tension, plus ou moins grande n'influe pas sensiblement sur la réaction de la force de torsion.

Cependant, par beaucoup d'expériences faites avec de très-grandes tensions relativement à la force du métal, il paroît que les grandes tensions diminuent ou altèrent un

peu la force de torsion. L'on sent en effet qu'à mesure que la tension augmente, le fil s'allonge, son diamètre diminue, ce qui doit ralentir la durée des oscillations.

Nous n'avons pas pu comparer les fils de fer ou de laiton, *n.º 1*, sous les tensions d'une demi-livre & de deux livres, parce que, comme nous l'avons dit dans le détail des Expériences, la tension d'une demi-livre n'est pas suffisante pour redresser ces fils.

X I I.

De la force de torsion relativement aux longueurs des fils.

NOUS venons de trouver, dans l'article qui précède, que le plus ou moins de tension des fils n'influoit que d'une manière insensible sur la force de torsion. Nous allons actuellement chercher, d'après les mêmes expériences, de combien, à angle égal de torsion, la longueur du fil de suspension augmente ou diminue cette force. Mais il est clair qu'à mesure que l'on augmente la longueur du fil de métal, l'on peut faire faire, dans la même proportion, un plus grand nombre de révolutions au cylindre, sans changer le degré de torsion; ainsi, la force de réaction de torsion doit être, pour un même nombre de révolutions, en raison inverse de la longueur du fil. Voyons si ce raisonnement s'accorde avec l'expérience.

La formule, de l'article VII, nous donne

$$T = \left(\frac{M a^2}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 180 \text{ degrés,}$$

ou pour le même poids T proportionnel à $\frac{1}{(\sqrt{n})}$. Ainsi, si n est en raison inverse des longueurs, comme la théorie l'annonce, T sera comme les racines des longueurs des fils de suspension: comparons avec l'expérience.

Nous trouvons, *dixième expérience*, que le fil de laiton, *n.º 7*, de 9 pouces de longueur, étant tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en 110".

Nous trouvons, *treizième expérience*, que le même fil de laiton, n.^o 7, de 36 pouces de longueur, tendu par le poids de 2^e livres, fait 20 oscillations en 222".

Ainsi les longueurs des fils sont entr'eux :: 1 : 4, tandis que les temps des oscillations des fils sont :: 1 : 2; ainsi l'expérience prouve que les temps d'un même nombre d'oscillations, sont, pour les mêmes fils tendus par les mêmes poids, comme la racine des longueurs de ces fils, ainsi que la théorie l'avoit annoncé.

Nous avons fait beaucoup d'expériences du même genre que les précédentes, qui ont toutes très-exactement confirmé cette loi. Nous n'avons pas cru nécessaire d'en grossir ce Mémoire.

X I I I.

De la force de torsion relativement à la grosseur des fils.

Nous venons de déterminer les loix de la force de torsion relativement à la tension & à la longueur des fils; il ne nous reste qu'à les déterminer relativement à la grosseur des mêmes fils.

Nous avons, dans les six premières expériences, trois fils de fer de différentes grosseurs & de même longueur; & dans les six expériences suivantes, trois fils de laiton de même longueur & de grosseurs différentes: mais comme nous avons le poids d'une longueur de 6 pieds de chacun de ces fils, il est facile d'en conclure le rapport de leur diamètre. Voici ce que le raisonnement doit faire prévoir; le *momentum* de la réaction de torsion doit augmenter, avec la grosseur des fils, de trois manières. Prenons pour exemple deux fils de même nature & de même longueur, que le diamètre de l'un soit double de celui de l'autre, il est clair que dans celui qui a un diamètre double, il y a quatre fois plus de parties tendues par la torsion, que dans celui qui a un diamètre simple; & que l'extension moyenne de toutes ces parties sera proportionnelle au diamètre du fil, de même

246 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

que le bras moyen du levier relativement à l'axe de rotation. Ainsi nous sommes portés à croire, d'après la théorie, que la force de torsion de deux fils de métal, de la même nature, de la même longueur, mais d'une grosseur différente, est proportionnelle à la quatrième puissance de leur diamètre, ou pour une même longueur au carré de leur poids. Comparons avec l'expérience.

Nous ne prendrons ici que les expériences où la tension est de 2 livres, pour pouvoir comparer tous les n° s, les fils du n° 1 n'étant pas assez exactement tendus par le poids d'une demi-livre : nous avons

Fils de fer.	<i>Deuxième expérience.</i> Le fil de fer, n° 12, dont les 6 pieds de longueur pèsent 5 grains, donne 20 oscillations en... 242".
	<i>Quatrième expérience.</i> Le fil de fer, n° 7, dont les 6 pieds de longueur pèsent 14 grains, donne 20 oscillations en... 85".
	<i>Sixième expérience.</i> Le fil de fer, n° 1, dont les 6 pieds pèsent 56 grains, donne 20 oscillations en... 23".
Fils de laiton.	<i>Huitième expérience.</i> Le fil de laiton, n° 12, dont les 6 pieds pèsent 5 grains, a donné 20 oscillations en... 442".
	<i>Dixième expérience.</i> Le fil de laiton, n° 7, dont les 6 pieds pèsent 18 grains $\frac{1}{2}$, donne 20 oscillations en... 110".
	<i>Deuxième expérience.</i> Le fil de laiton, n° 1, dont les 6 pieds pèsent 66 grains, donne 20 oscillations en... 32".

Pour déterminer, d'après ces expériences, la loi de la réaction de la force de torsion, relativement au diamètre du fil de suspension, supposons que

$$T : T' :: D^m : D'^m :: \frac{m}{\varphi^2} : \frac{m'}{\varphi'^2},$$

où l'on suppose que T & T' représentent le temps d'un certain nombre d'oscillations pour un fil de métal, dont le diamètre est D & D' , & le poids pour une même longueur

φ & φ' ; m étant la puissance que l'on cherche à déterminer. De cette proportion, nous tirerons

$$m = \frac{2 (\log. T - \log. T')}{\log. \varphi - \log. \varphi'},$$

formule qu'il faut comparer avec l'expérience.

La deuxième expérience, comparée avec la quatrième, donne... $m = -1,82$.

La deuxième expérience, comparée avec la sixième... $m = -1,95$.

La huitième expérience, comparée avec la dixième... $m = -2,04$.

La huitième expérience, comparée avec la douzième... $m = -2,02$.

D'où il résulte que

$$T : T' :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{D'^2} :: \frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi'}.$$

Mais la formule du mouvement oscillatoire

$$T = \left(\frac{M a^2}{2 n} \right)^{\frac{1}{2}} 180 \text{ degrés},$$

donne, dans les expériences précédentes, à cause de l'égalité des poids de tension, n proportionnel à $\frac{1}{T^2}$; ainsi la force de torsion, pour des fils de même nature, de même longueur, mais de grosseur différente, est comme la quatrième puissance du diamètre, ainsi que la théorie l'avait annoncé.

X I V.

Résultat général.

IL résulte donc de toutes les expériences qui précèdent, que le *momentum* de la force de torsion, est, pour les fils du même métal, en raison composée de l'angle de torsion de la quatrième puissance du diamètre, & inverse de la longueur du fil; en sorte que si l'on nomme l la longueur du fil, D son diamètre, B l'angle de torsion, l'on aura, pour l'expression qui représente la force de torsion, $\frac{\mu B D^4}{l}$, où μ est un coefficient constant qui dépend de la roideur

248 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

naturelle de chaque métal : cette quantité μ , invariable pour les fils du même métal, peut se déterminer facilement par l'expérience, comme on va le voir dans l'article suivant.

X V.

Valeur effective des quantités n & μ .

NOUS avons vu, *article VII*, que $n = \frac{P \cdot a^2}{2 \lambda}$, où P est le poids d'un cylindre, a son rayon, λ la longueur du pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, qui sont produites par la force de torsion.

Appliquons cette formule à la *deuxième expérience*, où le fil de fer, *n.º 12*, est tendu par un poids de 2 livres, dont le rayon est 9 lignes $\frac{1}{2}$, & où 20 oscillations se font en 242".

Comme le pendule, qui bat les secondes à Paris, est de 440 lignes $\frac{1}{2}$, le pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, fera $440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20} \right)^2$; ainsi

$$n = \frac{2 \text{ liv. } (9 \frac{1}{2})^2}{2 \cdot 440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20} \right)^2} = \frac{1 \text{ liv.}}{715}.$$

ainsi le *momentum* $n B$ du fil de fer, *n.º 12*, ayant 9 pouces de longueur, est égal à $\frac{1}{715}$ livres, multiplié par l'angle de torsion B , agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

Nous avons vu, dans les articles qui précèdent, que pour le même métal, il résulteroit de la théorie & de l'expérience que les forces de torsion étoient en raison inverse de la longueur des fils de suspension & de la quatrième puissance du diamètre. Ainsi il est facile d'avoir une valeur déterminée, de la force de torsion d'un fil de fer, d'une longueur & d'une grosseur quelconque; en voici le calcul.

Le

Le pied cube de fer, pesant à peu-près 540 livres, & les 6 pieds de longueur du fil de fer, n.^o 12, pesant 5 grains, le diamètre de ce fil de fer est très-approchant d'un quinzième de ligne; ainsi le *momentum* de torsion d'un fil de fer, d'un quinzième de ligne de diamètre, est égal à $\frac{1}{715}$ livre, multiplié par l'angle de torsion, agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

X V I.

Comparaison de la roideur de torsion de deux métaux différens.

L'ON déduira facilement, de la théorie & des expériences qui précèdent, quel est, dans deux métaux différens, le fer, par exemple, & le cuivre jaune, le rapport de roideur de torsion: prenons le fil de fer, n.^o 12, que nous comparerons avec le fil de laiton, n.^o 12.

Nous venons de calculer à l'article précédent, la quantité n , pour le fil de fer, & nous l'avons trouvée

$= \frac{1}{715}$ livre, multiplié par un levier d'une ligne.

Mais comme le fil de laiton, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 442", nous aurons, par la même

formule pour le fil de laiton, $n' = \frac{1 \text{ liv. } (9 \frac{1}{2})^2}{442 \div (\frac{442}{20})^2}$; ainsi

$\frac{n}{n'} = (\frac{442}{241})^2 = 3,34$; ainsi la roideur du fil de fer, n.^o 12, est à la roideur du fil de laiton, n.^o 12, à peu-près :: $3 \frac{1}{3}$: 1.

Mais comme il y a peu de différence entre la pesanteur spécifique du fer & du cuivre, qui, suivant M. Musschembroek, sont :: 77 : 83, l'on peut supposer que le fil de fer, n.^o 12, & celui de cuivre, même numéro, ont à peu-

250 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

près le même diamètre ; ainsi pour les fils de fer & de cuivre du même diamètre, tout étant d'ailleurs égal, les roideurs de torsion sont :: $3 \frac{1}{3} : 1$, c'est-à-dire qu'en tordant le fil de fer d'un cercle, l'on aura la même réaction de torsion, qu'en tordant le fil de cuivre de $3 \frac{1}{3}$ cercles.

Si l'on veut ensuite comparer la roideur de torsion avec la force de cohésion, l'on remarquera que notre fil de fer portoit, au moment de sa rupture, 60 onces, que celui de cuivre ne portoit que 35 onces ; ainsi puisqu'ils ont à peu-près le même diamètre, leur force de cohésion étoit approchant :: $60 : 35$, dans le temps que leur force de torsion vient d'être trouvée :: $3 \frac{1}{3} : 1$.

Ce dernier résultat ne doit cependant être regardé que comme un cas particulier & non comme un résultat général. Nous verrons dans la deuxième section de ce Mémoire, que la force des métaux varie suivant le degré d'écrouissement & de recuit, & que toutes les expériences dont on s'est servi jusqu'ici pour déterminer la force des métaux, ne peuvent être regardées que comme des cas particuliers.

Mais ce que cette dernière observation semble indiquer, & ce que la pratique confirme, c'est que si l'on veut soutenir un corps mobile sur la pointe d'un pivot, il y a de l'avantage à préférer un pivot d'acier ou de fer, à un pivot de cuivre, puisque sous le même degré de pression le fer fléchit beaucoup moins que le cuivre ; qu'ainsi le cercle de contact formé par la pointe du pivot, pressée par le corps qu'elle soutient, aura un moindre diamètre pour le fer que pour le cuivre, ce qui, tout étant d'ailleurs égal, diminue le *momentum* du frottement qu'il faut vaincre pour faire tourner un corps sur la pointe d'un pivot : nous aurons occasion par la suite de revenir sur cet article.

Par quelques expériences & par un calcul semblable à celui qui précède, nous avons trouvé qu'en suspendant un cylindre à un fil de soie, formé de plusieurs brins

réunis à l'eau bouillante, & assez fort pour porter jusqu'à 60 onces, ce fil de soie avoit 18 à 20 fois moins de roideur de torsion que le fil de fer qui portoit ce même poids au moment de la rupture.

X V I I.

Usage des expériences & de la théorie qui précède.

D'APRÈS la théorie qui précède, & les expériences sur lesquelles elle est fondée, l'on pourra mesurer des forces très-petites, qui exigent une précision que les moyens ordinaires ne peuvent pas fournir: nous allons en présenter un exemple.

X V I I I.

Balance pour mesurer le frottement des fluides contre les solides.

LA formule qui exprime la résistance des fluides contre un corps en mouvement, paroît composée de plusieurs termes, dont les uns dépendent du choc des fluides contre le corps solide, & dont les autres sont dûs au frottement du fluide: parmi les termes dûs au frottement, il y en a un qui dépend de l'adhérence, & que l'on croit constant; mais ce terme est si petit, que confondu dans les expériences avec les autres quantités qui dépendent du choc, il est très-difficile de l'évaluer: l'on peut voir les expériences que M. Newton a faites pour découvrir cette quantité constante. (*Livre II des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle, Scholie du vingt-cinquième théorème.*)

La force de torsion donne un moyen facile de déterminer par l'expérience cette adhérence.

Dans un vase *ADBE*, *fig. 3*, rempli du fluide dont on veut déterminer l'adhérence, l'on suspend, au moyen d'un fil de cuivre, un cylindre *abcd*, de cuivre ou de

plomb; l'on place dessus le vase un cercle $A'F'I'$, divisé en degrés; ce cercle se trouve au niveau de l'extrémité d d'un index id attaché au cylindre.

Lorsque l'on fera tourner le cylindre autour de son axe vertical, sans le déranger de son à-plomb, l'on pourra observer, au moyen du petit index, de combien chaque oscillation est altérée: & comme la force de torsion du fil qui produit ces oscillations, est connue par les expériences qui précèdent; que l'on peut aussi connoître l'altération due à l'imperfection de l'élasticité, en faisant osciller le cylindre dans le vide ou même dans l'air; l'on peut espérer, par ce moyen, de trouver la quantité constante due à l'adhérence.

Exemple & Expérience.

J'AI suspendu dans un vase plein d'eau, à un fil de cuivre, n.^o 12, de vingt-neuf lignes de longueur, le cylindre de plomb pesant deux livres, qui nous a servi dans les expériences précédentes: le cercle AB , sur lequel l'on observoit les oscillations, avoit quarante-quatre lignes de diamètre; l'on a attendu, avant de commencer les observations, que les amplitudes des oscillations fussent diminuées au point que l'extrémité d de l'index ne parcourût sur le cercle qu'un arc d'une ligne & demie, répondant à peu-près à $3^d 55'$; & en observant la marche de l'index avec une loupe, l'on a aperçu distinctement quatorze oscillations avant que le mouvement fût éteint.

Résultat de cette Expérience.

Si la diminution successive de chaque oscillation est supposée constante, & qu'elle soit attribuée en entier à l'adhérence du fluide contre la surface du cylindre de plomb, l'on aura, art. VIII,

$$(A - S') = \left(\frac{2\pi}{\dots}\right).$$

où $(A - S')$ est la diminution de chaque oscillation, $n(A - S)$ le *momentum* de la force de torsion, & μ le *momentum* de la force retardatrice dûe à l'adhérence.

Mais comme, d'après les observations des oscillations, l'arc parcouru étoit diminué d'une ligne & demie en quatorze oscillations, & que le rayon du cercle sur lequel s'observoit cette diminution, étoit de vingt-deux lignes; en supposant cette diminution constante, l'on aura l'angle $(A - S)$ dont l'amplitude diminue à chaque oscillation $= \frac{3}{2.22.14}$.

Mais nous avons trouvé, *art. XVI*, que pour un fil de laiton de neuf pouces de longueur, *n.º 12*,

$$n = \frac{1 \text{ livre. } (9 \frac{1}{2})^2}{440 \frac{1}{2} \cdot (\frac{44^2}{20})^2};$$

& comme nous avons aussi trouvé que les forces de torsion sont proportionnelles à la longueur des fils de suspension, l'on aura pour notre fil de vingt-neuf pouces de longueur.

$$\mu = \frac{1}{3.155.000} \text{ livre} \times 1 \text{ ligne},$$

c'est-à-dire, que le *momentum* de la force retardatrice constante μ , est à peu-près égal à un trois millionème de livre, suspendu à un levier d'une ligne: quantité qui auroit été inappréciable par tout autre moyen que celui que nous venons d'employer.

Pour avoir actuellement la valeur de l'adhérence d'après cette expérience, il faut remarquer que la hauteur du cylindre de plomb, submergée par l'eau du vase, étoit de vingt-quatre lignes, & que le diamètre de ce cylindre étoit de dix-neuf lignes. Ainsi, en prenant $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre, la surface du cylindre submergée, étoit égale à $\frac{22}{7} \cdot 19 \cdot 24$; & comme le mouvement se fait ici autour de l'axe du cylindre,

254 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

dont le rayon est $9\frac{1}{2}$ lignes, si δ est l'adhérence, le *momentum* de l'adhérence autour de l'axe de rotation, sera $\delta \frac{22}{7} (19)^2 \cdot 12$. Il faut encore ajouter à cette quantité le *momentum* de l'adhérence du cercle qui forme la base du cylindre plongé dans l'eau, dont le *momentum*

$$= \delta \frac{22}{7} \cdot 19^1 \cdot \frac{19^1}{4} \cdot \frac{2}{3} \frac{19}{2},$$

en sorte que le *momentum* total de la résistance du fluide contre le cylindre sera

$$\delta \frac{22}{7} (19)^2 \cdot (12 + \frac{19}{12}) = \delta \cdot \frac{22}{7} \cdot (19)^2 (\frac{163}{12}).$$

Mais l'expérience nous a fait trouver ce même *momentum*

$$= \frac{1 \text{ livre}}{3,155,000} \cdot 1 \text{ ligne pour un pouce carré; ainsi}$$

$$\delta = \frac{1 \text{ livre}}{3,155,000} \cdot \frac{7 \cdot 12}{22 \cdot 163 \cdot (19)^2},$$

& pour un pied carré l'adhérence sera

$$\delta (144)^2 = \frac{1 \text{ livre}}{2345000},$$

en sorte que la résistance constante dûe à l'adhérence de l'eau pour une surface de 255 pieds, ne peut pas être évaluée à plus d'un grain; ainsi il y a peu de cas où cette altération constante, si elle a lieu, ne puisse être négligée dans l'évaluation du frottement de l'eau. Nous n'avons fait aucun essai sur les autres fluides.

En donnant au cylindre des oscillations de deux ou trois cercles d'amplitude, & comparant les diminutions successives des amplitudes des oscillations avec les formules du mouvement oscillatoire altéré, j'ai cru apercevoir que dans les très-petites vitesses, ce frottement est comme les vitesses, & dans les grandes vitesses, comme le carré; mais ces expériences demandent un travail exprès, & d'être faites dans différens fluides.

X I X.

DEPUIS la lecture de ce Mémoire, j'ai construit, d'après la théorie de la réaction de torsion que je viens d'expliquer, une balance électrique & une balance magnétique; mais comme ces deux instrumens, ainsi que les résultats relatifs aux loix électriques & magnétiques qu'ils ont donnés, seront décrits dans les volumes suivans de nos Mémoires, je crois qu'il suffit ici de les annoncer.

X X.

S E C O N D E S E C T I O N.

De l'altération de la force élastique dans les torsions des fils de métal. Théorie de la cohérence & de l'élasticité.

LORSQUE l'on tord les fils de fer ou de laiton, tendus, comme dans les expériences qui précèdent, par un poids, l'on observe deux choses; si l'angle de torsion n'est pas considérable, relativement à la longueur du fil de suspension, dans le moment où l'on lâche le poids, il revient à peu-près à la position qu'il avoit avant la torsion du fil de métal, c'est-à-dire, que le fil de suspension se détord de toute la quantité dont il a été tordu; mais si l'angle de torsion que l'on aura donné au fil de suspension, est très-grand, pour lors ce fil ne se détord que d'une certaine quantité, & le centre de réaction de torsion s'avancera de toute la quantité dont le fil ne sera pas détordu. C'est donc d'après ces deux considérations, qu'il faut diriger les expériences que nous devons faire dans cette section, ce qui demande deux suites d'expériences; la première, pour déterminer par la diminution des oscillations, de combien la force élastique de torsion est altérée dans le mouvement oscillatoire, quoique le centre de réaction de torsion ne soit pas déplacé; la seconde, pour déterminer le déplacement de ce centre de réaction, lorsque l'angle de torsion est assez grand pour que ce déplacement ait lieu.

256 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
X X I.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil-de-fer, n.° 1, longueur, six pouces six lignes.

L'ON a pris un fil de fer de six pouces six lignes de longueur, il a été chargé d'un poids de deux livres, le même qui a servi dans les expériences de la section précédente. L'on a cherché, en faisant tourner ce cylindre autour de son axe pour torde le fil de suspension, à déterminer de combien de degré l'amplitude diminueoit à chaque oscillation, & l'on a trouvé :

<i>Premier essai</i> , angle de torsion 90° perd 10° en $3\frac{1}{2}$ oscillat.	
<i>Deuxième essai</i>	45 $10\frac{1}{2}$.
<i>Troisième essai</i>	$22\frac{1}{2}$ 23.
<i>Quatrième essai</i>	$11\frac{1}{4}$ 46.

Remarque sur cette Expérience.

Les diminutions des amplitudes des oscillations ont été très-incertaines, lorsque l'angle primitif de torsion a été de plus de 90 degrés; l'on a même observé que pour lors, en faisant tourner le cylindre autour de son axe, il ne revient pas à la première position, & que la position respective des parties constitutives du fil a été altérée, & par conséquent, que son centre de réaction de torsion a resté déplacé; voici ce que l'expérience fournit sur ce déplacement.

X X I I.

Suite de la première Expérience.

Dans cette partie de la première expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torsion, suivant le degré de torsion que l'on a donné au fil de suspension.

Première

Premier	essai, en tordant de. $\frac{1}{2}C$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'index ou le centre} \\ \text{de torsion a été} \\ \text{déplacé de.....} \end{array} \right\}$	... 8 ^d
Deuxième	essai.....	1C.....	50.
Troisième	essai.....	2.....	310.
Quatrième	essai.....	3.....	1C + 300.
Cinquième	essai.....	4.....	2 + 290.
Sixième	essai.....	5.....	3 + 280.
Septième	essai.....	6.....	4 + 260.
Huitième	essai.....	10.....	8 + 240.

Neuvième essai. Ayant voulu continuer à tordre toujours dans le même sens de quinze nouveaux cercles, le fil a cassé au quatorzième. Après cette expérience, ce fil étoit droit & très-roide, il s'étoit séparé suivant sa longueur, en deux parties; examiné à la loupe, cette séparation étoit très-sensible, & il avoit exactement la figure d'une corde formée de deux torons.

X X I I I.

Remarque sur cette Expérience.

Cette première expérience & sa suite paroissent annoncer qu'au-dessous de 45 degrés, les altérations sont à peu-près proportionnelles aux amplitudes des angles de torsion, comme on le voit par les deuxième, troisième & quatrième essais de l'expérience première; qu'au-dessus de 45^d, les altérations augmentent dans un rapport beaucoup plus grand; que le centre de réaction de torsion ne commence à se déplacer que lorsque l'angle de torsion est à peu-près d'une demi-circonférence; que ce déplacement croît à mesure que l'on tord le fil; qu'il est assez irrégulier jusqu'à 1 cercle 10 degrés; que, passé ce terme de torsion, la

Mém. 1784.

K k

258 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

réaction de torsion reste à peu-près la même pour tous les angles de torsion : ainsi, par exemple, en tordant, dans le quatrième essai, de trois cercles, le centre de réaction de torsion se déplace d'un cercle $+ 300$ degrés, en sorte que la réaction de torsion n'a ramené le cylindre que d'un cercle 60 degrés. Dans le septième essai, nous voyons, qu'après avoir déjà éprouvé dans les essais antérieurs, un déplacement de plus de huit cercles, que six nouveaux cercles de torsion déplacent le centre de réaction de torsion de $4 C + 260$ degrés, en sorte que pour plus de quatorze cercles de torsion, la réaction de torsion n'est encore que d'un cercle plus 100 degrés ; ainsi elle ne diffère que d'un dixième de la réaction de torsion pour trois cercles de torsion que le quatrième essai nous a donnés d'un cercle $+ 60$ degrés : les expériences qui vont suivre éclairciront cette remarque.

X X I V.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, longueur, 6 pouces 6 lignes.

L'ON a cherché, dans la première partie de cette expérience, de combien les amplitudes des oscillations diminuoient à chaque oscillation, lorsque le centre de torsion n'étoit pas encore déplacé.

Premier essai, angle de torsion	180^d perd 10^d en...	$3\frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième essai.....	90	12 .
Troisième essai.....	45	27 .
Quatrième essai.....	$22\frac{1}{2}$	54 .

Suite de cette deuxième Expérience.

Dans cette deuxième partie de la même expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de 3 cercles	$\left\{ \begin{array}{l} \text{le centre de réaction} \\ \text{de torsion déplacé} \\ \text{de.....} \end{array} \right\}$		300 ^d
Deuxième essai.....	4.....	1 C +	180.
Troisième essai.....	6.....	3 +	90.
Quatrième essai.....	8.....	5 +	90.
Cinquième essai.....	12.....	9 +	40.
Sixième essai.....	20.....	16 +	310.
Septième essai.....	30.....	26 C +	180.
Huitième essai.....	50.....	46 +	20.
Neuvième essai, au dix-septième cercle de torsion le fil a cassé.			

X X V.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, longueur, 6 pouces 6 lignes.

LA première partie de cette expérience a été faite sous le même point de vue que la première partie des deux expériences qui précèdent.

Premier essai, angle de torsion 360 ^d perd..	10 ^d en..	1 oscillat.
Deuxième essai.....	180.....	10.... 2.
Troisième essai.....	90.....	10.... 5.
Quatrième essai.....	45.....	10.... 11.
Cinquième essai.....	22½.....	10.... 25.

*Suite de cette troisième Expérience.**Déplacement du centre de torsion.*

Premier essai, en tordant de 4 cercles	$\left\{ \begin{array}{l} \text{le centre de réaction} \\ \text{de torsion déplacé} \\ \text{de.....} \end{array} \right\}$		300 ^d .
Deuxième essai.....	6.....	2 C +	40.
Troisième essai, aux six autres tours le fil a cassé.			

K k ij

160 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
X X V I.

LES expériences précédentes ont été continuées avec des fils de laiton, employés aux expériences de la première section.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, longueur, 6 pouces 6 lignes.

Premier essai, en tordant de	180 ^d perd..	12 ^d en...	2 oscillat.
Deuxième essai.....	90.....	10.....	6.
Troisième essai.....	45.....	10.....	16.
Quatrième essai.....	22½.....	10.....	40.
Cinquième essai.....	11¼.....	10.....	80.

Suite de la quatrième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	2 cercles	{ le centre de torsion a été déplacé de.. }	160 ^d .
Deuxième essai.....	4.....	2 C +	0.
Troisième essai.....	6.....	3 C +	300.
Quatrième essai.....	10.....	7 C +	300.
Cinquième essai.....	20.....	17 C +	340.
Sixième essai, au vingt-huitième cercle de torsion le fil s'est rompu.			

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, longueur, 6 pouces 6 lignes.

Diminution des amplitudes dans les oscillations.

Premier essai, en tordant de	360 ^d perd..	10 ^d en...	2½ oscillat.
Deuxième essai.....	180.....	10.....	6.
Troisième essai.....	90.....	10.....	13.
Quatrième essai.....	45.....	10.....	31.
Cinquième essai.....	22½.....	10.....	72.

*Suite de la cinquième Expérience.**Déplacement du centre de torsion.*

En tordant de quatre cercles, le centre s'est déplacé de 220 degrés ; mais en voulant tordre de six cercles, le fil a cassé.

X X V I I.

DANS le fil employé à cette dernière expérience, la torsion altère moins les oscillations, & par conséquent la force élastique, que dans toutes les autres ; c'est ce qui résulte du grand nombre d'oscillations qui a lieu ici avant que le mouvement oscillatoire soit détruit ; c'est ce qui résulte également de la rupture soudaine de ce fil, sans pouvoir déplacer d'un cercle son centre de réaction. J'ai généralement trouvé que les fils de laiton, répandus dans le commerce, entre les n.^{os} 5 & 8, étoient ceux dont l'élasticité de torsion étoit la moins imparfaite : en comparant les fils de fer & de laiton sous les *mêmes* numéros, l'on trouve également que les fils de laiton ont une amplitude d'élasticité beaucoup plus étendue que les fils de fer.

Au surplus, l'expérience présente beaucoup d'irrégularités dans les résultats : deux bobines du même fil & du même numéro, ne donnent pas toujours le même déplacement au même angle de torsion, ce qui ne peut être attribué qu'à la manière dont les fils sont manufacturés, qu'à la plus ou moins grande pression qu'ils éprouvent en passant sous la lèvre de la filière, qu'au recuit qu'on leur fait éprouver pour réduire successivement le diamètre de numéro en numéro, du gros au petit.

X X V I I I.

Première Remarque.

MALGRÉ l'incertitude qui règne dans les expériences des oscillations pour les amplitudes des étendues, il paroît

qu'en dedans de certaines limites, ces altérations sont à peu-près proportionnelles à l'amplitude de l'oscillation, comme nous l'avons annoncé dans les remarques sur la première expérience, & comme toutes les autres le confirment. La résistance de l'air ne peut altérer que très-peu, dans nos expériences, l'amplitude des oscillations, je m'en suis assuré par le moyen suivant. Le poids de deux livres, qui a servi aux expériences de cette section, avoit 26 lignes de hauteur & 19 lignes de diamètre; j'ai formé avec un papier très-léger, une surface cylindrique du même diamètre que ce poids, mais qui avoit 70 lignes de hauteur: je faisois entrer une partie du cylindre de plomb dans mon enveloppe de papier, & je formois ainsi un cylindre de 78 lignes de hauteur, ou trois fois plus long que le premier, ce qui auroit dû tripler, dans le mouvement oscillatoire, les altérations dûes à la résistance de l'air; mais je n'ai jamais trouvé que ces altérations fussent d'un dixième plus considérable dans ce second cas que dans le premier, le plus souvent elles étoient égales; ainsi la résistance de l'air n'entre dans nos expériences, que pour des quantités que l'on peut négliger.

X X I X.

Seconde Remarque.

POUR former une balance de torsion, il faut toujours choisir les fils qui ont l'élasticité la moins imparfaite; les fils de laiton sont de beaucoup préférables à ceux de fer: le choix de la grosseur dépend des forces que l'on veut mesurer. J'ai une balance magnétique, qui sera décrite dans nos Mémoires, où je me suis servi alternativement d'un fil de laiton de 3 pieds de longueur, des *n.ºs* 12 & 7; la force élastique de torsion est telle, qu'en tenant ces fils tordus de huit cercles, pendant trente heures, il n'y avoit pas un degré d'altération ou de déplacement dans le centre de torsion.

XXX.

Troisième Remarque.

DANS tous les fils de métal, la réaction de l'élasticité n'a qu'une certaine étendue: l'isochronisme des oscillations nous apprend que dans les premiers degrés de torsion, la force élastique est presque parfaite; mais au-delà de l'angle de torsion qui sert, pour ainsi dire, de mesure à la force élastique, le centre de réaction de torsion se déplace presque en entier de tout l'angle de torsion qui excède celui de la réaction de l'élasticité. Cependant, comme on peut le remarquer dans les expériences qui précèdent, l'amplitude de la réaction élastique n'est pas une quantité constante pour tous les angles de torsion, elle croît à mesure que la torsion augmente; moins l'élasticité première, dans le fil soumis à l'expérience, a d'étendue, plus cet accroissement est grand. Un fil de laiton, n.^o 1, de 6 pouces & demi de longueur, rougi au feu, pour lui faire perdre par le recuit, la plus grande partie de son élasticité, ne donnoit après cette opération, pour le premier cercle de torsion, que 50 degrés de réaction d'élasticité; mais il avoit acquis, après 90 cercles de torsion, une étendue d'élasticité de près de 500 degrés dans cet intervalle; du 2 au 3.^{me} cercle de torsion, la réaction de l'élasticité s'étoit accrue de 12 degrés; du 40 au 41.^{me} cercle de torsion, la même réaction s'étoit accrue de 6 degrés; & du 90 au 91.^{me} cercle de torsion, à peu-près d'un degré, en sorte que l'accroissement de la réaction élastique, après que le centre de réaction a été déplacé d'un certain angle, étoit à peu-près en raison inverse de l'angle de déplacement. Il faut avertir qu'après ces 90 cercles de torsion, j'ai voulu tordre de 50 autres cercles le même fil, mais qu'il s'est rompu au 49.^{me}, en sorte que ce fil, avant de se rompre, pouvoit être tordu de 140 cercles. Si l'on

compare ce résultat avec la suite de la première expérience, où le même fil, n.^o 1, n'avoit pas été recuit, l'on trouvera qu'après 25 cercles de torsion, la réaction de l'élasticité étoit de 480 degrés, qu'en tordant de 15 nouveaux cercles, le fil s'est cassé; ce dernier fil ne pouvoit donc éprouver, sans se rompre, que 40 cercles de torsion. En suivant dans cette expérience la marche de la réaction élastique, l'on en déduira qu'au point de rupture, cette réaction étoit à peu-près égale à celle du fil recuit dans le même point de rupture; d'où il paroîtroit que l'on est en droit de conclure que par la seule torsion l'on peut donner à un fil recuit toute l'élasticité dont il peut être susceptible, & que l'écrouissement ne peut rien y ajouter; en sorte que réciproquement, si en passant à la filière, ou par un autre moyen quelconque, l'on avoit pu donner à notre fil de laiton un écrouissement tel, que sa réaction d'élasticité eût été de 520 degrés, qui me paroît être celle de nos deux fils au moment de la rupture, pour lors la réaction élastique eût été portée à son *maximum* par cette première opération: il n'y auroit plus eu de déplacement possible dans le centre de réaction de torsion; mais toutes les fois que l'on auroit fait éprouver à ce fil une torsion de plus de 520 degrés, il se seroit rompu.

X X X I.

Quatrième Remarque.

D'APRÈS les expériences qui précèdent, voici, à ce qu'il paroît, comme l'on peut expliquer l'élasticité & la cohérence des métaux. Les parties intégrantes du fil de fer ou de laiton, ou d'un métal quelconque, ont une élasticité que l'on peut regarder comme parfaite, c'est-à-dire, que les forces nécessaires pour comprimer ou dilater ces parties intégrantes, sont proportionnelles aux dilatations ou compressions qu'elles éprouvent; mais elles ne sont liées entre elles

elles que par la cohérence, quantité constante & absolument différente de l'élasticité. Dans les premiers degrés de torsion, les parties intégrantes changent de figure, s'allongent ou se compriment, sans que les points par où elles adhèrent entr'elles, changent de place, parce que la force nécessaire pour produire ces premiers degrés de torsion, est moins considérable que la force d'adhérence; mais lorsque l'angle de torsion devient tel, que la force avec laquelle ces parties sont comprimées ou dilatées, est égale à la cohérence qui unit ces parties intégrantes, pour lors elles doivent ou se séparer ou glisser l'une sur l'autre. Ce glissement de parties, a lieu dans tous les corps ductiles; mais si par ce glissement de parties les unes sur les autres, le corps se comprime, l'étendue des points de contact augmente, & l'étendue du champ d'élasticité devient plus grand. Cependant comme ces parties intégrantes ont une figure déterminée, l'étendue des points de contact ne peut augmenter que jusqu'à un certain degré, au-delà duquel ce corps se rompt; c'est ce qui explique les effets détaillés dans l'article qui précède. Ce qui prouve encore qu'il faut distinguer la cause de l'élasticité, de l'adhérence, c'est que l'on peut faire varier la cohérence à volonté par le degré de recuit, sans altérer pour cela l'élasticité. C'est ainsi que lorsque je faisois recuire à blanc mon fil de cuivre, n.^o 1 des expériences précédentes, il perdoit une grande partie de sa force de cohérence: avant d'être recuit, il portoit au point de rupture 22 livres, & après le recuit il portoit à peine 12 à 14 livres; mais quoique l'adhérence fût presque diminuée de moitié par le recuit, & que l'amplitude d'élasticité fût presque diminuée dans la même proportion, cependant dans toute l'étendue de réaction élastique qui restoit au fil recuit, l'élasticité étoit la même, à angle égal de torsion, que dans le même fil non recuit, puisqu'en suspendant à l'un & à l'autre le même poids, le temps d'un même nombre d'oscillations étoit exactement égal dans les deux cas.

X X X I I.

UN effet assez curieux du rapprochement des parties dans la torsion des fils de métal, c'est celui qui a lieu lorsque l'on tord un fil de fer, qui par cette seule opération acquiert par le rapprochement des parties, la qualité de prendre le magnétisme à un plus haut degré qu'il ne l'avoit auparavant. Voici ce que l'expérience m'a appris à ce sujet; j'ai pris un fil de fer, tel qu'on les trouve répandus dans le commerce, de la grosseur de ceux qui servent pour les petites sonnettes; une longueur de six pouces, pesoit 57 grains; ce fil de six pouces, aimanté & suspendu horizontalement par un fil de soie détordu & très-fin, faisoit une oscillation en 18 secondes: ce même fil de six pouces de longueur, tordu jusqu'au point de rupture, & aimanté comme la première fois à saturation, par la méthode de la double touche, faisoit une oscillation en 6 secondes; en sorte que le *momentum* de la force directrice pour deux aiguilles égales & semblables, étant comme l'inverse du carré du temps d'un même nombre d'oscillations, le *momentum* magnétique de l'aiguille tordue, étoit neuf fois plus considérable que celui de l'aiguille non tordue: j'aurai occasion de revenir sur cet article dans un autre Mémoire.

X X X I I I.

POUR confirmer toute la théorie qui précède relativement à la cohérence & à l'élasticité, j'ai fait l'expérience suivante.

L'on a fixé, *fig. 4*, au moyen d'une agrafe *CD*, avec une vis *V*, une lame d'acier *AB*, sur le bord d'une table très-solide; cette lame étoit prise & serrée dans sa partie *Aa*, entre deux plaques de fer *E* & *F*, par la vis *V*: cette lame avoit 11 lignes de large, & demi-ligne d'épaisseur; depuis le point *a* jusqu'au point *B*, où étoit suspendu le poids *P*, il y avoit sept pouces de distance: l'on mesuroit sur la règle verticale *rg*, de combien le poids *P*,

faisoit baisser la lame AB à son extrémité B . Voici le détail des résultats, qui ont eu lieu suivant les différens poids, dont la lame étoit chargée.

L'on a fait rougir la lame à blanc, & on lui a donné une trempe très-roide; ensuite l'on a attaché en B à sept pouces du point a , différens poids. L'extrémité B a baissé,

Avec un poids d'une demi-livre de..... 8 lignes.

Avec un poids d'une livre de..... $15\frac{1}{2}$.

Avec un poids d'une livre & demie de..... $23+$.

L'on a pris cette même lame, & on l'a fait chauffer jusqu'à ce qu'elle eût pris la couleur violette, & qu'elle fût revenue à la consistance d'un excellent ressort; & l'on a trouvé également, qu'en la chargeant comme la première, l'extrémité B a baissé,

Avec $\frac{1}{2}$ livre de..... 8 lignes.

Avec 1 livre..... $15\frac{1}{2}+$

Avec $1\frac{1}{2}$ livre..... $23+$.

Enfin l'on a fait rougir cette même lame à blanc, & on l'a laissé refroidir très-lentement; & l'on a eu, en chargeant l'extrémité B , exactement les mêmes résultats que dans les deux expériences qui précèdent.

Il nous paroît que ces trois expériences prouvent d'une manière incontestable, que dans quelque état que se trouve la lame, les premiers degrés de sa force élastique ne sont nullement altérés; puisqu'en tenant compte du bras de levier, qui diminue à mesure que la lame est chargée, les mêmes poids la fléchissoient dans les trois états également & proportionnellement à la charge; que lorsqu'on ôtoit ces poids, elle reprenoit exactement sa première position horizontale.

J'ai voulu voir ensuite, quelle étoit la force de cette lame dans ces trois états différens; & dans le cas où le

268 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

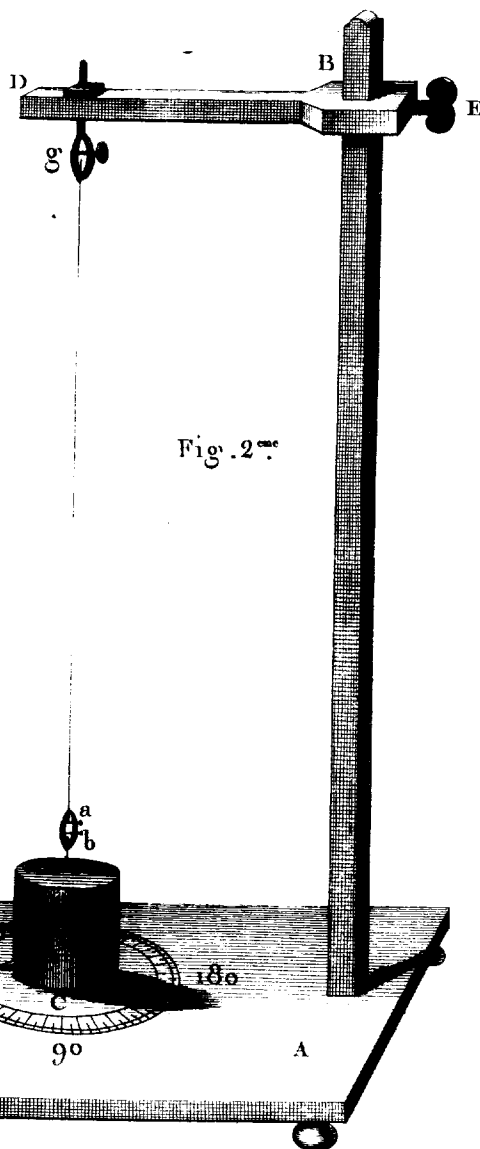
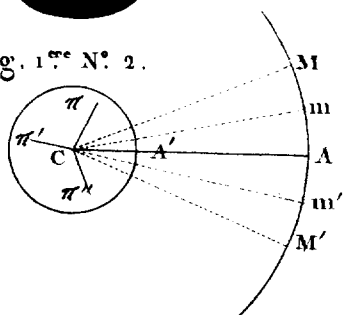
centre de flexion commenceroit à se déplacer, quel seroit le degré de flexion où la lame commenceroit à être pliée sans revenir à sa première position. Voici le résultat de cette expérience.

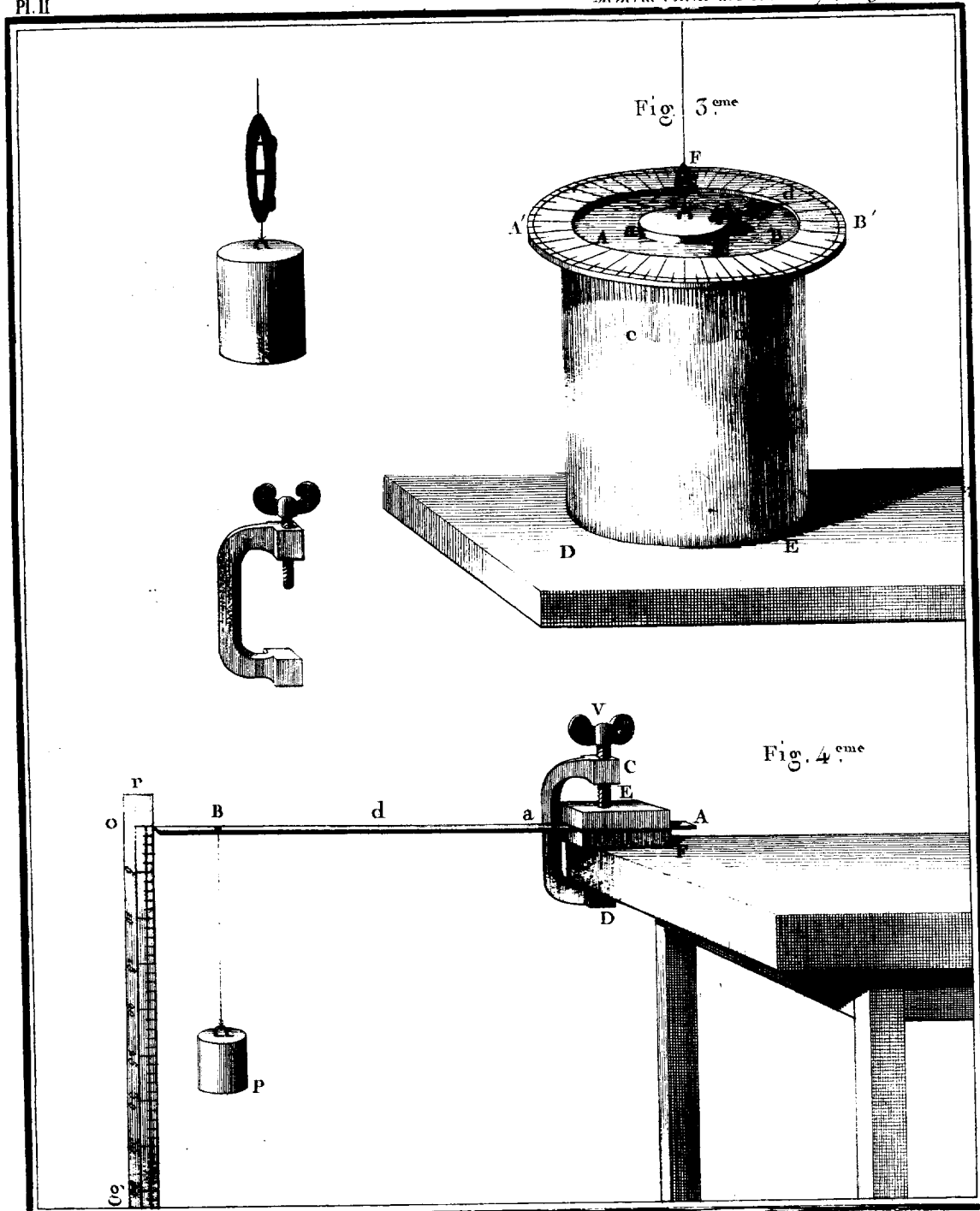
J'avois fait tirer d'une planche de tôle d'acier d'Angleterre, trois lames exactement semblables à celle de l'expérience qui précède : une de ces lames avoit été trempée très-roide, la seconde étoit revenue à la consistance d'un excellent ressort, & la troisième avoit été recuite à blanc, & refroidie lentement. J'attachois, *fig. 4*, un peson en *d* à 2 pouces $\frac{1}{2}$ de distance du point *a*, & j'avois soin d'exercer la traction toujours perpendiculairement à la direction de la lame. Voici ce que l'on a observé.

La lame trempée très-roide, se rompoit sous une traction de six livres; mais sous quelque angle qu'elle fût fléchie, au-dessous de celui de rupture, elle reprenoit exactement sa première position. La lame revenue couleur violette, formant un excellent ressort, ne se rompoit que sous une traction de dix-huit livres; elle se plioit jusqu'au point de rupture, d'un angle à peu-près proportionnel à l'angle de torsion, & sous quelques angles qu'elle fût fléchie avant celui de rupture, lorsqu'on la lâchoit, elle reprenoit sa première position. La lame recuite à blanc & refroidie lentement, se plioit jusqu'à une traction de cinq à six livres, proportionnellement à cette force de traction, & d'un angle absolument égal sous la même force que dans l'état de trempe & de ressort; mais en tirant ensuite toujours perpendiculairement à la direction de la lame, pour conserver le même levier, avec une force de sept livres, on la plioit sous tous les angles, sans qu'il fût besoin d'augmenter cette force: en la lâchant, elle se relevoit seulement de la quantité dont elle avoit été primitivement fléchie par une traction de six livres; en sorte que l'angle de réaction de flexion, se trouvoit changé de tout l'angle dont on l'avoit fléchi avec une force plus grande que sept livres.



Fig. 1.^{re} N. 2.





Essai de

V. le Comte d'Arle.

Ces dernières expériences nous ramènent aux mêmes résultats que celles qui ont précédé. Il est clair que pour avoir une idée de ce qui arrive dans la flexion des métaux, il faut distinguer la force élastique des parties intégrantes, de la force d'adhérence qui réunit ces parties entr'elles: la force élastique dépend, comme nous l'avons déjà dit, de la compression ou dilatation que les parties intégrantes éprouvent, & est toujours proportionnelle aux tractions. Ces parties intégrantes ne sont altérées, ni par la trempe ni par le recuit, puisque nous venons de voir que dans ces différens états, l'élasticité est la même sous les mêmes degrés de flexion; mais ces parties intégrantes, ne sont liées entr'elles que par un certain degré d'adhérence qui dépend probablement de leur figure & de la portion respective des différens fluides dont leurs pores sont remplis, ce qui varie suivant la trempe & le recuit. Dans l'acier trempé roide, & dans les bons ressorts, les molécules intégrantes ne peuvent ni glisser l'une sur l'autre, ni éprouver le moindre déplacement, sans que le corps ne se rompe; mais dans les corps ductiles, dans les métaux recuits, ces parties peuvent glisser l'une sur l'autre, & se déplacer, sans que l'adhérence en soit sensiblement altérée.

Ce que nous venons d'expliquer pour les métaux, paroît pouvoir s'appliquer à tous les corps; leurs parties sont toujours d'une parfaite élasticité, mais les corps sont durs, mous ou fluides, suivant l'adhérence de ces parties intégrantes. Si dans les corps durs, elles peuvent glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance soit sensiblement altérée, le corps sera ductile ou malléable; mais si elles ne peuvent pas glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance respective soit sensiblement altérée, le corps se rompra lorsque la force avec laquelle le corps sera tiré ou comprimé, sera égale à l'adhérence.

