



Point de vue de mathématicien sur la mécanique des fluides

par **Laure SAINT-RAYMOND**, Membre élue dans la discipline « Sciences mécaniques et informatiques »

J'ai choisi pour cette intervention un titre légèrement provocateur qui souligne le décalage qu'il peut y avoir entre les défis de la physique d'aujourd'hui et l'approche que peuvent en avoir les mathématiciens. Comme le soulignent souvent nos collègues avec humour, il est heureux que les avancées de la physique et encore plus de la technologie n'attendent pas les théorèmes. Il me semble néanmoins qu'à l'interface entre la physique et les mathématiques se trouvent un domaine de recherche vaste et seulement partiellement exploré, et que l'interaction des différentes communautés représentées ici notamment dans la section de mécanique et d'informatique peut être très fructueuse.

Personnellement mon terrain de jeu préféré se situe autour du problème de réduction des modèles en mécanique des fluides, dont l'objectif est d'isoler pour un système donné les phénomènes que l'on peut observer à une échelle de temps et d'espace fixée. Ce problème est d'une importance cruciale dans de nombreux domaines de la physique : je me suis intéressée particulièrement à des questions issues de l'océanographie d'une part, et de la physique des plasmas d'autre part, où les systèmes étudiés sont extrêmement complexes et présentent une multitude d'échelles de temps et d'espace. Pour cela, j'ai adopté le langage et la rigueur parfois pointilleuse des mathématiciens, mais la compréhension des phénomènes physiques est évidemment une grande source d'intuition pour imaginer des solutions.

En amont de ces applications, le problème de réduction de modèles se pose aussi de façon très théorique, puisqu'il est lié à l'axiomatisation de la physique. C'est cet aspect de ma recherche que je voudrais présenter brièvement maintenant, évidemment sans entrer dans les détails techniques mais en soulignant quelques difficultés conceptuelles.

Le système que je vais considérer est le plus simple qu'on puisse imaginer, un gaz constitué d'un grand nombre de particules identiques n'interagissant que par contact. Les lois de Newton permettent théoriquement d'en prédire l'évolution en décrivant la position et la vitesse de chacune des particules élémentaires. Néanmoins la complexité est telle qu'en général cela ne permet pas de se faire une idée qualitative de la dynamique macroscopique.

Si l'échelle spatiale d'observation est grande comparée au libre parcours moyen des particules, on se contente en général d'une description beaucoup plus grossière où le gaz est considéré comme un milieu continu caractérisé par un petit nombre de variables telles que la pression, la température ou la vitesse d'écoulement (qui sont des quantités moyennes). En écrivant les lois de Newton pour des macro-particules de fluide, on obtient un système de lois de conservation, mais la relation de fermeture est prescrite de façon phénoménologique. Cela signifie que les équations fluides ne sont en fait que des approximations de la dynamique microscopique, valides quand le gaz est localement à l'équilibre. En d'autres termes, une telle description macroscopique suppose que la distribution des vitesses est donnée en chaque point par la mesure de Boltzmann-Gibbs (qui correspond à l'état macroscopique le plus probable).



Pour comprendre le mécanisme qui tend à privilégier cette configuration, il est naturel d'adopter un point de vue statistique et de décrire le système à un niveau intermédiaire par la distribution de positions/vitesses des particules élémentaires. Cette description est plus précise que les modèles fluides puisqu'on n'impose pas de contrainte sur la répartition des vitesses. Par contre, n'a perdu de l'information par rapport à la description microscopique puisqu'on n'identifie plus chaque particule :

on considère une particule « moyenne » en oubliant son environnement précis, c'est-à-dire en oubliant les corrélations.

Le problème est alors de comprendre dans quelle mesure ces différentes descriptions sont cohérentes, de savoir s'il existe une transition continue de l'une à l'autre. Plus précisément, on veut caractériser les régimes où l'approximation fluide est pertinente à l'aide de petits paramètres caractéristiques du gaz.

Une première difficulté conceptuelle vient du fait que les modèles microscopique et macroscopiques sont de nature différente. Il semble donc paradoxal qu'ils puissent décrire le même système. En particulier, à l'échelle microscopique, le système de particules est totalement réversible et satisfait le principe de récurrence de Poincaré, alors qu'au niveau macroscopique, on a un second principe de la thermodynamique et donc de l'irréversibilité, qui est liée à l'apparition de mécanismes dissipatifs. Il est important ici de souligner que cette dissipation est liée à une perte d'information : alors que le modèle microscopique est déterministe, les modèles macroscopiques décrivent seulement un comportement moyen ou hautement probable.

Une seconde difficulté consiste à identifier les paramètres qui permettent de mesurer l'acuité de l'approximation. On notera qu'en introduisant un niveau de description intermédiaire, on se restreint à l'étude des gaz parfaits pour lesquels le libre parcours moyen des particules élémentaires est grand devant leur taille. En d'autres termes, on ne considère ici que des gaz parfaits, pour lesquels il n'y a pas de terme de volume exclu dans la relation d'état.

A ce stade, on peut envisager un énoncé mathématique rigoureux où la transition est décrite par un résultat de convergence : on a en effet identifié un ou plusieurs petits paramètres (que l'on fait tendre artificiellement vers 0 !), et une notion de convergence adaptée (en probabilité). Néanmoins le problème reste à ce jour largement ouvert car on ne sait prouver que des bribes de cet énoncé.

Le meilleur résultat concernant le passage de l'échelle microscopique à l'échelle intermédiaire est essentiellement le théorème de Lanford qui date de 1975. La principale difficulté consiste à montrer la propagation du chaos, i.e. l'absence de corrélations dans les arbres de collision, dans la limite de faible densité. Le point est qu'on ne sait pas contrôler les concentrations au-delà d'un temps très court. En particulier, il se produit trop peu de collisions durant ce temps pour que l'on puisse observer une relaxation vers l'équilibre local, qui est le prérequis pour obtenir une approximation fluide. Impossible donc de combiner les deux passages à la limite.

Un travail récent avec Thierry Bodineau et Isabelle Gallagher montre néanmoins qu'on peut réaliser l'ensemble du programme dans le cas très particulier d'un système initialement proche d'un état d'équilibre global. On obtient ainsi le mouvement brownien comme limite d'échelle d'une dynamique complètement déterministe !