Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1189–1195
Comptes Rendus Mathematique

Géométrie différentielle

Laplacien hypoelliptique et intégrales orbitales

Jean-Michel Bismut [1]

Département de mathématique, université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 23 juillet 2009 ; accepté le 2 septembre 2009

Disponible sur Internet le 23 septembre 2009

Présenté par Jean-Michel Bismut

Résumé

On donne une nouvelle méthode de calcul d'intégrales orbitales utilisant le Laplacien hypoelliptique. On obtient un formalisme unifiant le théorème de l'indice d'Atiyah–Singer et la formule des traces. ***Pour citer cet article : J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Hypoelliptic Laplacian and orbital integrals. We give a new approach to orbital integrals based on the hypoelliptic Laplacian. The formalism unifies the Atiyah–Singer index theorem and the trace formula. ***To cite this article: J.-M. Bismut, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Introduction

Dans cette Note, on annonce une nouvelle méthode de calcul des intégrales orbitales semisimples, fondée sur la théorie du Laplacien hypoelliptique. Cette théorie produit une famille d'opérateurs hypoelliptiques sur l'espace total du fibré tangent ou cotangent de la variété Riemannienne considérée, qui interpole en un sens adéquat entre la théorie de Hodge usuelle, et le flot géodésique. Cette théorie a été développée dans [3] dans le contexte de la théorie de de Rham et dans [4] pour l'opérateur de Dirac. Dans [7], Lebeau et nous-même avons développé les fondements analytiques de la théorie, et montré que quand $b \to 0$, on retrouve bien la théorie de Hodge pour le complexe de de Rham.

Quand G est un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, un Laplacien hypoelliptique sur $G \times \mathfrak{g}$ a été construit dans [5]. Les formules classiques exprimant le noyau de la chaleur à l'aide du réseau des coracines sont obtenues comme conséquence de la théorie du Laplacien hypoelliptique.

Dans cette Note, si G est un groupe de Lie réductif, et si K est un compact maximal, on calcule des intégrales orbitales semisimples à l'aide d'une déformation hypoelliptique de l'opérateur de Casimir sur l'espace symétrique

Adresse e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr.

[1] L'auteur remercie L. Clozel, F. Labourie, W. Müller et Y. Tschinkel pour d'utiles conversations. Il est particulièrement redevable à G. Lebeau pour son aide amicale.

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.09.014

$X = G/K$. Si $\widehat{\mathcal{X}}$ est l'espace total du fibré plat $G \times_K \mathfrak{g}$ sur X, la déformation hypoelliptique agit sur $\widehat{\mathcal{X}}$. Dans un formalisme unifiant le théorème d'Atiyah–Singer et la formule des traces, on montre en particulier que certaines intégrales orbitales semisimples sont invariantes par la déformation hypoelliptique considérée. Le calcul explicite des intégrales orbitales est obtenue par des méthodes de théorie de l'indice local. La mise en œuvre de ce formalisme exige un contrôle très précis du noyau de la chaleur hypoelliptique sur $\widehat{\mathcal{X}}$. Cette estimation est de nature géométrique, et repose sur l'utilisation du théorème de Toponogov. Les preuves des résultats de cette Note sont données dans [6].

Dans la Note, on adopte les conventions de sommation d'Einstein.

1. L'opérateur de Dirac de Kostant et sa déformation hypoelliptique

Soit G un groupe de Lie réductif, soit K un compact maximal dans G, et soit θ l'involution de Cartan. Soit $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G, K. Soit B une forme bilinéaire symétrique non dégénérée Ad-invariante sur $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$, de telle sorte que B est positive sur $\mathfrak{p}$, et négative sur $\mathfrak{k}$. Soit m, n les dimensions de $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$. Soit B^* la forme associée à B sur $\mathfrak{g}^*$. Alors B^* s'étend en une forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*)$. Soit $\kappa^{\mathfrak{g}} \in \Lambda^3(\mathfrak{g}^*)$ telle que si $a, b, c \in \mathfrak{g}$,

$$\kappa^{\mathfrak{g}}(a, b, c) = B\big([a, b], c\big). \tag{1}$$

Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, soit $C^{\mathfrak{g}} \in U(\mathfrak{g})$ le Casimir. Si $e_1, \dots, e_{m+n}$ est une base de $\mathfrak{g}$, et si $e_1^*, \dots, e_{m+n}^*$ est la base duale de $\mathfrak{g}$ relativement à B, alors

$$C^{\mathfrak{g}} = -e_i^* e_i. \tag{2}$$

Soit $c(\mathfrak{g}), \widehat{c}(\mathfrak{g})$ les algèbres de Clifford associées à $(\mathfrak{g}, B), (\mathfrak{g}, -B)$. Si $a, b \in \mathfrak{g}$, les relations de commutation définissant ces algèbres sont données par

$$ab + ba = \mp 2B(a, b). \tag{3}$$

Si $a \in \mathfrak{g}$, on désigne désormais par $c(a) \in c(\mathfrak{g}), \widehat{c}(a) \in \widehat{c}(\mathfrak{g})$ les éléments correspondants dans les algèbres de Clifford. Si $A \in \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ est B-antisymétrique, on pose

$$c(A) = \frac{1}{4} B\big(Ae_i^*, e_j^*\big) c(e_i) c(e_j), \qquad \widehat{c}(A) = -\frac{1}{4} B\big(Ae_i^*, e_j^*\big) \widehat{c}(e_i) \widehat{c}(e_j). \tag{4}$$

Alors $A \to c(A)$, $A \to \widehat{c}(A)$ sont des morphismes d'algèbre de Lie.

Soit $\widehat{c}(-\kappa^{\mathfrak{g}})$ l'élément de $c(\mathfrak{g})$ canoniquement associé à $-\kappa^{\mathfrak{g}}$, de telle sorte que

$$\widehat{c}\big(-\kappa^{\mathfrak{g}}\big) = -\frac{1}{6} \sum \kappa^{\mathfrak{g}}\big(e_i^*, e_j^*, e_k^*\big) \widehat{c}(e_i) \widehat{c}(e_j) \widehat{c}(e_k). \tag{5}$$

On rappelle que $c(\mathfrak{g}), \widehat{c}(\mathfrak{g})$ agissent sur $\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g})$. Si $a \in \mathfrak{g}$, si $a^* = B(a, \cdot) \in \mathfrak{g}^*$, les actions $c(a), \widehat{c}(a)$ de a sur $\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*)$ sont données par

$$c(a) = a^* \wedge -i_a, \qquad \widehat{c}(a) = a^* \wedge +i_a. \tag{6}$$

On pose

$$\widehat{\mathcal{A}}^{\mathfrak{g}} = \widehat{c}(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}). \tag{7}$$

Définition 1.1. Soit $\widehat{D}^{\mathfrak{g}} \in \widehat{\mathcal{A}}^{\mathfrak{g}}$ l'opérateur de Dirac de Kostant [9,10],

$$\widehat{D}^{\mathfrak{g}} = \widehat{c}\big(e_i^*\big) e_i + \frac{1}{2} \widehat{c}\big(-\kappa^{\mathfrak{g}}\big). \tag{8}$$

La formule de Kostant indique que

$$\widehat{D}^{\mathfrak{g},2} = -C^{\mathfrak{g}} - \frac{1}{4} B^*\big(\kappa^{\mathfrak{g}}, \kappa^{\mathfrak{g}}\big). \tag{9}$$

On suppose maintenant que $e_1, \dots, e_m$ est une base orthonormale de $\mathfrak{p}$ pour $B|_{\mathfrak{p}}$, et que $e_{m+1}, \dots, e_{m+n}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{k}$ pour $-B|_{\mathfrak{k}}$. On note $\nabla_{e_1}, \dots, \nabla_{e_{m+n}}$ les opérateurs de différentiation correspondants sur $\mathfrak{g}$. Soit $Y = Y^{\mathfrak{p}} + Y^{\mathfrak{k}}$ le point générique de $\mathfrak{g}$. Soit $|Y|$ la norme euclidienne de Y associée à $B|_{\mathfrak{p}}, -B|_{\mathfrak{k}}$.

On pose

$$\mathcal{D}^{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{m} c\big(e_i^*\big)\nabla_{e_i}, \qquad \mathcal{E}^{\mathfrak{p}} = \widehat{c}\big(Y^{\mathfrak{p}}\big),$$
$$\mathcal{D}^{\mathfrak{k}} = \sum_{i=m+1}^{n} c\big(e_i^*\big)\nabla_{e_i}, \qquad \mathcal{E}^{\mathfrak{k}} = \widehat{c}\big(Y^{\mathfrak{k}}\big). \tag{10}$$

Les opérateurs $\mathcal{D}^{\mathfrak{p}} + \widehat{c}(Y^{\mathfrak{p}})$, $-\mathcal{D}^{\mathfrak{k}} + \mathcal{E}^{\mathfrak{k}}$ sont liés aux opérateurs de Witten [13] sur $\mathfrak{p}$ et sur $\mathfrak{k}$. Leurs noyaux sont de dimension 1 et engendrés par les fonctions $\exp(-|Y^{\mathfrak{p}}|^2/2)$, $\exp(-|Y^{\mathfrak{k}}|^2/2)$.

On considère $\widehat{D}^{\mathfrak{g}}$ comme un opérateur différentiel agissant sur $C^\infty(G, \Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*))$. Cet opérateur agit donc sur $C^\infty(G \times \mathfrak{g}, \Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*))$. Si $S^{\cdot}(\mathfrak{g}^*)$ est l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}^*$, la décomposition de $L_2(\mathfrak{g}^*)$ en polynômes d'Hermite multipliés par le poids Gaussien permet de relier $C^\infty(G \times \mathfrak{g}, \Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*))$ à $C^\infty(G, \Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*) \otimes S^{\cdot}(\mathfrak{g}^*))$.

Notons que K agit isométriquement sur $\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*) \otimes S^{\cdot}(\mathfrak{g}^*)$. L'action par multiplication à droite de K sur G induit une action de K sur $C^\infty(G, \Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*) \otimes S^{\cdot}(\mathfrak{g}^*))$.

Définition 1.2. Pour $b > 0$, soit $\mathfrak{D}_b$ l'opérateur,

$$\mathfrak{D}_b = \widehat{D}^{\mathfrak{g}} + ic\big(\big[Y^{\mathfrak{k}}, Y^{\mathfrak{p}}\big]\big) + \frac{1}{b}\big(\mathcal{D}^{\mathfrak{p}} + \mathcal{E}^{\mathfrak{p}} - i\mathcal{D}^{\mathfrak{k}} + i\mathcal{E}^{\mathfrak{k}}\big). \tag{11}$$

L'opérateur $\mathfrak{D}_b$ commute avec K.

Soit $X = G/K$ l'espace symétrique associé à G. Le scindage $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ définit une connexion sur le G-fibré principal $p : G \to X$. Soit $\rho^E : K \to \mathrm{Aut}(E)$ une représentation unitaire de K de dimension finie. Soit F le fibré correspondant $G \times_K E$ sur X. Les représentations de K sur $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ définissent des fibrés réels TX, N sur X, TX étant le fibré tangent. Ces fibrés sont munis de connexions hermitiennes ou euclidiennes, notées ∇^E, ∇^{TX}, ∇^N. La connexion ∇^{TX} est la connexion de Levi-Civita. Les connexions naturelles sur d'autres K-fibrés seront notées de manière similaire.

Comme G agit sur $\mathfrak{g}$, $TX \oplus N$ est muni d'une connexion plate $\nabla^{TX \oplus N, f}$. Plus précisément l'espace total $\widehat{\mathcal{X}}$ de $TX \oplus N$ peut être canoniquement identifié à $X \times \mathfrak{g}$. Soit $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{X}} \to X$ la projection canonique.

On considère le fibré de dimension infinie au dessus de X donné par

$$G \times_K \big(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}^*) \otimes S^{\cdot}(\mathfrak{g}^*) \otimes E\big) = \Lambda^{\cdot}(T^*X \oplus N^*) \otimes S^{\cdot}(T^*X \oplus N^*) \otimes F. \tag{12}$$

Comme l'opérateur $\mathfrak{D}_b$ commute avec K, il descend en un opérateur $\mathfrak{D}_b^X$ agissant sur les sections C^∞ sur X de ce fibré. De manière équivalente, $\mathfrak{D}_b^X$ agit sur $C^\infty(\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\pi}^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X \oplus N^*) \otimes F))$.

Soit $Y = Y^{TX} + Y^N$ la section canonique de $TX \oplus N$ sur $\widehat{\mathcal{X}}$. Soit $\Delta^{TX \oplus N}$ le Laplacien euclidien le long des fibres de $TX \oplus N$. Soit $N^{\Lambda^{\cdot}(T^*X \oplus N^*)}$ l'opérateur de nombre sur $\Lambda^{\cdot}(T^*X \oplus N^*)$. L'involution de Cartan θ agit sur $TX \oplus N$, qui sont les espaces propres de θ relativement aux valeurs propres $-1, 1$. Les opérateurs indexés par $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ dans (10) descendent en des opérateurs indexés par TX, N.

Théorème 1.3. *On a les identités,*

$$\mathfrak{D}_b^X = \widehat{D}^{\mathfrak{g},X} + ic\big(\big[Y^N, Y^{TX}\big]\big) + \frac{1}{b}\big(\mathcal{D}^{TX} + \mathcal{E}^{TX} - i\mathcal{D}^N + i\mathcal{E}^N\big),$$
$$\frac{1}{2}\mathfrak{D}_b^{X,2} = \frac{1}{2}\widehat{D}^{\mathfrak{g},X,2} + \frac{1}{2}\big|\big[Y^N, Y^{TX}\big]\big|^2 + \frac{1}{2b^2}\big(-\Delta^{TX \oplus N} + |Y|^2 - m - n\big) + \frac{N^{\Lambda^{\cdot}(T^*X \oplus N^*)}}{b^2}$$
$$+ \frac{1}{b}\big(\nabla_{Y^{TX}}^{C^\infty(TX \oplus N, \widehat{\pi}^*(\Lambda^{\cdot}(T^*X \oplus N^*) \otimes F))} + \widehat{c}\big(\mathrm{ad}\big(Y^{TX}\big)\big) - c\big(\mathrm{ad}\big(Y^{TX}\big) + i\theta\,\mathrm{ad}\big(Y^N\big)\big) - i\rho^E\big(Y^N\big)\big). \tag{13}$$

Définition 1.4. Pour $b > 0$, on définit le Laplacien hypoelliptique $\mathcal{L}_b^X$ par la formule,

$$\mathcal{L}_b^X = -\frac{1}{2}\widehat{D}^{\mathfrak{g},X,2} + \frac{1}{2}\mathfrak{D}_b^{X,2}. \tag{14}$$

Cet opérateur agit sur $C^\infty(\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{\pi}^*(\Lambda^\cdot(T^*X \oplus N^*)) \otimes F)$.

Soit $\mathcal{L}^X$ l'opérateur

$$\mathcal{L}^X = \frac{1}{2}C^{\mathfrak{g}} + \frac{1}{8}B^*\big(\kappa^{\mathfrak{g}}, \kappa^{\mathfrak{g}}\big) \tag{15}$$

agissant sur $C^\infty(X, F)$.

De (13), on tire par Hörmander [8] que l'opérateur $\mathcal{L}_b^X$ est hypoelliptique, alors que naturellement $\mathcal{L}^X$ est elliptique. Au terme quartique $\frac{1}{2}|[Y^N, Y^{TX}]|^2$ près, l'opérateur $\mathcal{L}_b^X$ a une structure comparable aux Laplaciens hypoelliptiques de [3–5,7].

Soit H le noyau de l'opérateur $\mathcal{D}^{TX} + \mathcal{E}^{TX} - i\mathcal{D}^N + i\mathcal{E}^N$. Nous savons que ce noyau est formé du produit de $\widehat{\pi}^*F$ par la Gaussienne $\exp(-|Y|^2/2)$. Soit P le projecteur orthogonal fibre à fibre sur ce noyau.

Proposition 1.5. *On a l'identité,*

$$P\big(\widehat{D}^{\mathfrak{g},X} + ic\big(\big[Y^N, Y^{TX}\big]\big)\big)P = 0. \tag{16}$$

De plus on a l'identité de Bianchi,

$$\big[\mathfrak{D}_b^X, \mathcal{L}_b^X\big] = 0. \tag{17}$$

En utilisant les références données plus haut, on comprend pourquoi en un sens faible, $\mathcal{L}_b^X$ déforme $\mathcal{L}^X$.

2. Intégrales orbitales elliptiques et hypoelliptiques

Soit $\gamma \in G$ un élément semisimple de G, et soit $[\gamma]$ sa classe de conjugaison dans G. Après conjugaison, on peut supposer que γ s'écrit sous la forme

$$\gamma = e^a k^{-1}, \quad a \in \mathfrak{p},\ k \in K, \qquad \mathrm{Ad}(k)a = a, \tag{18}$$

la décomposition (18) étant par ailleurs unique.

Rappelons que par [1], la fonction distance d est convexe sur $X \times X$. Soit $X(\gamma) \subset X$ la sous-variété de X des points critiques de la fonction de déplacement $d_\gamma(x) = d(x, \gamma x)$. Si $Z^0(\gamma)$ est la composante connexe du centralisateur de γ, et si $K^0(\gamma) = K \cap Z^0(\gamma)$, $X(\gamma)$ est l'espace symétrique associé à $(Z^0(\gamma), K^0(\gamma))$. Soit $N_{X(\gamma)/X}$ le fibré normal à $X(\gamma)$. Si $\mathfrak{z}(\gamma) = \mathfrak{p}(\gamma) \oplus \mathfrak{k}(\gamma)$ est l'algèbre de Lie de $Z(\gamma)$, et si $\mathfrak{z}^\perp(\gamma) = \mathfrak{p}^\perp(\gamma) \oplus \mathfrak{k}^\perp(\gamma)$ est son orthogonal dans $\mathfrak{g}$, alors les fibres de $N_{X(\gamma)/X}$ sont isomorphes à $\mathfrak{p}^\perp(\gamma)$.

On identifie l'espace total $\mathcal{N}_{X(\gamma)/X}$ du fibré normal à X par la carte géodésique normale. Par convexité de la distance, on montre que si $(x_0, f) \in \mathcal{N}_{X(\gamma)/X}$ est tel que $|f| \geqslant 1$,

$$d_\gamma(x_0, f) \geqslant C|f|. \tag{19}$$

Si $\mathrm{d}x$ est la mesure de volume sur X, et si $\mathrm{d}x_0$ la mesure de volume sur $X(\gamma)$, soit $r(f)$ la fonction telle que

$$\mathrm{d}x = r(f)\,\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}f. \tag{20}$$

Alors il existe $C > 0$, $C' > 0$ tel que

$$r(f) \leqslant C\exp\big(C'|f|\big). \tag{21}$$

Pour $t > 0$, soit $p_t^X(x, x')$ le noyau C^∞ associé à l'opérateur $\exp(-t\mathcal{L}^X)$. On sait qu'étant donné $t > 0$,

$$\big|p_t^X(x, x')\big| \leqslant C\exp\big(-C'd^2(x, x')\big). \tag{22}$$

On pose $x_0 = p1$.

Définition 2.1. On pose,

$$\operatorname{Tr}^{[\gamma]}\big[\exp\big(-t\mathcal{L}^X\big)\big]=\int\limits_{\mathfrak{p}^\perp(\gamma)}\operatorname{Tr}^F\big[\gamma p_t^X\big(e^f x_0,\gamma e^f x_0\big)\big]r(f)\,\mathrm{d}f. \tag{23}$$

Les inégalités (19), (21) et (22) garantissent l'existence de l'intégrale dans (23). On peut interpréter (23) comme une intégrale sur l'orbite adjointe de γ dans G.

Pour $t>0$, soit $q_{b,t}^X((x,Y),(x',Y'))$ le noyau C^∞ associé à $\exp(-t\mathcal{L}_b^X)$. On définit l'intégrale orbitale hypoelliptique associé à $\exp(-t\mathcal{L}_b^X)$, par une formule semblable à (23), où E est remplacé par $\Lambda(\mathfrak{p}^*\oplus\mathfrak{k}^*)\otimes S^\cdot(\mathfrak{p}^*\oplus\mathfrak{k}^*)\otimes E$, et où la trace devient une supertrace. Pour donner un sens à cette définition, on montre dans [6] le résultat qui suit. Soit $\mathbf{P}$ le projecteur de $\Lambda^\cdot(T^*X\oplus N^*)\otimes F$ sur $\Lambda^{(0)}(T^*X\oplus N^*)\otimes F=F$.

Théorème 2.2. *Étant donnés $\epsilon>0$, $M>0$ tels que $\epsilon\leqslant M$, il existe $C>0$, $C'>0$ tels que si $\epsilon\leqslant t\leqslant M$, $0<b\leqslant M$ $(x,Y),(x',Y')\in\widehat{\mathcal{X}}$, alors*

$$\big|q_{b,t}^X\big((x,Y),(x',Y')\big)\big|\leqslant C\exp\big(-C'\big(d^2(x,x')+|Y|^2+|Y'|^2\big)\big). \tag{24}$$

Quand $b\to 0$,

$$q_{b,t}^X\big((x,Y),(x',Y')\big)\to\mathbf{P}\frac{1}{\pi^{(m+n)/2}}\exp\big(-\big(|Y|^2+|Y'|^2\big)/2\big)p_t^X(x,x')\mathbf{P}. \tag{25}$$

Démonstration. Notons que quand X est une variété compacte, une version fonctionnelle de (25) a été démontrée dans [7]. Dans le cas présent, la preuve est difficile, car il s'agit d'obtenir une estimation uniforme pour $b>0$ borné, alors que X est non compacte. Le calcul de Malliavin [12] tel qu'il est utilisé dans [2] et [7, Chapitre 14] combiné à des techniques classiques de calcul des variations [11] permettent d'obtenir les deux résultats précédents. On utilise la Proposition 1.5 dans la preuve. □

On peut maintenant définir l'intégrale orbitale hypoelliptique.

Définition 2.3. Pour $b>0$, on pose

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{s}}^{[\gamma]}\big[\exp\big(-t\mathcal{L}_b^X\big)\big]=\int\limits_{\mathfrak{p}^\perp(\gamma)}\Bigg[\int\limits_{TX\oplus N}\operatorname{Tr}_{\mathrm{s}}^{\Lambda^\cdot(T^*X\oplus N^*)\otimes F}\big[\gamma q_{b,t}^X\big(\big(e^f x_0,Y\big),\gamma\big(e^f x_0,Y\big)\big)\big]\,\mathrm{d}Y\Bigg]r(f)\,\mathrm{d}f. \tag{26}$$

Par (24), l'intégrale dans (26) est bien définie.

3. Calcul des intégrales orbitales

Pour calculer l'intégrale orbitale elliptique dans (23), on montre le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Pour tout $b>0$, $t>0$,*

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{s}}^{[\gamma]}\big[\exp\big(-t\mathcal{L}_b^X\big)\big]=\operatorname{Tr}^{[\gamma]}\big[\exp\big(-t\mathcal{L}^X\big)\big]. \tag{27}$$

Démonstration. On montre tout d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial b}\operatorname{Tr}_{\mathrm{s}}^{[\gamma]}\big[\exp\big(-t\mathcal{L}_b^X\big)\big]=0. \tag{28}$$

On utilise pour cela l'identité de Bianchi dans (17), et le fait que les intégrales orbitales peuvent s'interpréter comme des supertraces généralisées sur une algèbre convenable d'opérateurs à noyaux. On utilise ensuite le Théorème 2.2. □

Notons que

$$\mathfrak{z}(\gamma) = \{ f \in \mathfrak{g},\ [a,f] = 0,\ \mathrm{Ad}(k) f = f \}. \tag{29}$$

On pose

$$\mathfrak{z}_0 = \ker \mathrm{ad}(a). \tag{30}$$

Alors $\mathfrak{z}_0$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de a. Soit $\mathfrak{z}_0^{\perp}(\gamma)$ l'orthogonal à $\mathfrak{z}(\gamma)$ dans $\mathfrak{z}_0$. On a le scindage,

$$\mathfrak{z}_0^{\perp}(\gamma) = \mathfrak{p}_0^{\perp}(\gamma) \oplus \mathfrak{k}_0^{\perp}(\gamma). \tag{31}$$

Définition 3.2. Pour $Y_0^{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}(\gamma)$, on pose,

$$\begin{aligned} J_\gamma\big(Y_0^{\mathfrak{k}}\big) = {} & \frac{1}{|\det(1-\mathrm{Ad}(\gamma))|_{\mathfrak{z}_0^{\perp}}|^{1/2}} \frac{\widehat{A}(i\,\mathrm{ad}(Y_0^{\mathfrak{k}})|_{\mathfrak{p}(\gamma)})}{\widehat{A}(i\,\mathrm{ad}(Y_0^{\mathfrak{k}})_{\mathfrak{k}(\gamma)})} \\ & \times \left[\frac{1}{\det(1-\mathrm{Ad}(k^{-1}))|_{\mathfrak{z}_0^{\perp}(\gamma)}} \frac{\det(1-\exp(-i\,\mathrm{ad}(Y_0^{\mathfrak{k}}))\,\mathrm{Ad}(k^{-1}))|_{\mathfrak{k}_0^{\perp}(\gamma)}}{\det(1-\exp(-i\,\mathrm{ad}(Y_0^{\mathfrak{k}}))\,\mathrm{Ad}(k^{-1}))|_{\mathfrak{p}_0^{\perp}(\gamma)}} \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{32}$$

On pose

$$p = \dim \mathfrak{p}(\gamma), \qquad q = \dim \mathfrak{k}(\gamma). \tag{33}$$

On a alors le résultat essentiel de cette Note :

Théorème 3.3. *Pour tout $t > 0$, on a l'identité* :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^{[\gamma]}\big[\exp\big(-t\mathcal{L}^X\big)\big] = {} & \frac{\exp(-|a|^2/2t)}{(2\pi t)^{p/2}} \\ & \times \int_{\mathfrak{k}(\gamma)} J_\gamma\big(Y_0^{\mathfrak{k}}\big)\,\mathrm{Tr}^E\big[\rho^E\big(k^{-1}\big)\exp\big(-i\rho^E\big(Y_0^{\mathfrak{k}}\big)\big)\big]\exp\big(-\big|Y_0^{\mathfrak{k}}\big|^2/2t\big)\frac{dY_0^{\mathfrak{k}}}{(2\pi t)^{q/2}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Démonstration. La preuve consiste à faire tendre $b \to +\infty$ dans (27), et à montrer que l'intégrale orbitale hypoelliptique se concentre autour de $X(\gamma)$. Le théorème de Toponogov joue un rôle essentiel dans la preuve. □

Soit $P^{\perp}(\gamma) \subset X$ l'image de $\mathfrak{p}^{\perp}(\gamma)$ par l'application $f \to e^f x_0$. On pose

$$\Delta_X^{\gamma} = \{ (x, \gamma x),\ s \in P^{\perp}(\gamma) \}. \tag{35}$$

Alors Δ_X^{γ} est une sous-variété de $X \times X$. Du Théorème 3.3, on déduit dans [6] la le calcul des intégrales orbitales distributions pour l'équation des ondes.

Théorème 3.4. *On a l'égalité de distributions paires sur* $\mathbf{R}$ *dont le support est inclus dans* $\{s \in \mathbf{R},\ |s| \geqslant \sqrt{2}\,|a|\}$, *et dont le support singulier est inclus dans* $\pm\sqrt{2}\,|a|$,

$$\int_{\Delta_X^{\gamma}} \mathrm{Tr}^E\big[\cos\big(s\sqrt{\mathcal{L}^X + A}\big)\big] = \int_{H^{\gamma}} \mathrm{Tr}^E\big[\cos\big(s\sqrt{-\Delta^{\mathfrak{z}(\gamma)}/2 + A}\big) J_\gamma\big(Y_0^{\mathfrak{k}}\big)\rho^E\big(k^{-1}\big)\exp\big(-i\rho^E\big(Y_0^{\mathfrak{k}}\big)\big)\big]. \tag{36}$$

Remarque 3.5. Quand γ est un élément semisimple assez régulier de G, dans [6], on déduit du Théorème 3.4 les formes plus classiques du calcul des intégrales orbitales. On retrouve en particulier la formule des traces de Selberg.

Références

[1] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, Manifolds of Nonpositive Curvature, Progr. Math., vol. 61, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.
[2] J.-M. Bismut, Large Deviations and the Malliavin Calculus, Progr. Math., vol. 45, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984.
[3] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle, J. Amer. Math. Soc. 18 (2) (2005) 379–476 (electronic).
[4] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Dirac operator, in: Geometry and Dynamics of Groups and Spaces, in: Progr. Math., vol. 265, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 113–246.
[5] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on a compact Lie group, J. Funct. Anal. 255 (9) (2008) 2190–2232.
[6] J.-M. Bismut, Hypoelliptic Laplacian and orbital integrals, 2009, in preparation.
[7] J.-M. Bismut, G. Lebeau, The Hypoelliptic Laplacian and Ray–Singer Metrics, Ann. of Math. Stud., vol. 167, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
[8] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. 119 (1967) 147–171.
[9] B. Kostant, On Macdonald's η-function formula, the Laplacian and generalized exponents, Adv. Math. 20 (2) (1976) 179–212.
[10] B. Kostant, Clifford algebra analogue of the Hopf–Koszul–Samelson theorem, the ρ-decomposition $C(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}\, V_\rho \otimes C(P)$, and the $\mathfrak{g}$-module structure of $\bigwedge \mathfrak{g}$, Adv. Math. 125 (2) (1997) 275–350.
[11] G. Lebeau, Geometric Fokker–Planck equations, Port. Math. (N.S.) 62 (4) (2005) 469–530.
[12] P. Malliavin, Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, in: Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976, Wiley, New York, 1978, pp. 195–263.
[13] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J. Differential Geom. 17 (4) (1983) 661–692, 1982.