

Éloge de Paul Malliavin¹
par Jean-Michel Bismut

Madame,
Mesdames et Messieurs les membres de la famille de Paul Malliavin,
Mes chers confrères,
Mesdames, Messieurs,
Paul Malliavin est décédé à Paris le 3 Juin 2010 dans sa quatre-vingt cinquième année. Un mois auparavant, il avait participé à une conférence organisée en son honneur à Pékin. Il avait donné quatre exposés pendant son séjour, dont un exposé auquel j'ai pu assister, qui était intitulé *Canonical Brownian Motion on the Space of Jordan Curves*, où il rapportait sur l'un de ses derniers résultats, obtenu avec Hélène Airault et Anton Thalmaier. Paul Malliavin est ainsi resté actif et disponible jusqu'au bout.

C'est de sa vie et de son œuvre qu'il m'appartient de vous entretenir aujourd'hui. Paul Malliavin naît le 11 Septembre 1925 à Neuilly. Son père était juriste, et sa mère médecin. Un oncle polytechnicien lui donne le goût des mathématiques, en lui enseignant des rudiments de trigonométrie et de balistique. Il hésitera d'ailleurs longtemps entre mathématiques d'une part, droit et économie d'autre part. Agrégé de mathématiques à 20 ans en 1946, après avoir suivi à la Sorbonne les cours d'Émile Borel et d'Élie Cartan, il interrompt ses études scientifiques pour obtenir en deux ans une licence en droit. Ayant reconnu que les mathématiques sont sa véritable vocation, il devient professeur de lycée à Nancy, tout en poursuivant sa formation à l'Université de Nancy, où il côtoie Henri Cartan, Jean Dieudonné, et Jean Leray.

Sa vocation pour l'analyse s'affirme. Szolem Mandelbrojt lui propose l'étude d'un problème posé dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Mandelbrojt et Wiener [2] sur l'ensemble des zéros réels d'une fonction holomorphe dans le demi-plan droit, sous des conditions de croissance sur les parallèles à l'axe imaginaire. Dans sa thèse soutenue à l'Université de Paris en 1954 et intitulée « Sur quelques procédés d'extrapolation », Paul Malliavin donne une solution complète du problème par une méthode de dualité totalement nouvelle. Cette thèse paraîtra en 1955 dans la revue *Acta Mathematica* [5].

Paul Malliavin est Maître de Conférences puis professeur à l'Université de Caen de 1955 à 1962, Professeur à Orsay de 1962 à 1966, puis professeur à l'Université de Paris à partir de 1967, dans la composante

1. Je remercie très vivement Madame Paul Malliavin pour les informations qu'elle a bien voulu me communiquer sur la vie et l'œuvre de Paul Malliavin.

qui deviendra l'Université Paris 6. Il enseigne également à l'École Polytechnique. Il est élu correspondant à l'Académie des Sciences en 1977, puis membre de l'Académie en 1979.

J'évoquerai devant vous son travail de mathématicien, ses contributions à la communauté scientifique, et sa participation à la vie de l'Académie des Sciences.

1. PAUL MALLIAVIN MATHÉMATICIEN

L'œuvre scientifique de Paul Malliavin est considérable. Elle touche à l'analyse réelle et complexe, à l'analyse harmonique, à la géométrie différentielle, aux équations aux dérivées partielles, à la théorie des probabilités qu'il contribue à révolutionner. Son œuvre se déroule sur 197 articles répertoriés aux *Mathematical Reviews*. Je n'en évoquerai ici que quelques aspects.

En 1959, Paul Malliavin [7, 8] résout un problème d'analyse harmonique posé par Beurling et Gelfand [1], la démonstration de l'impossibilité de la synthèse spectrale pour les groupes abéliens localement compacts qui sont non compacts. On veut savoir si certains espaces de fonctions peuvent être reconstruits à partir de fonctions de type exponentielle de Fourier, d'où le terme de « synthèse spectrale ». Dans le cas de \mathbf{R}^3 , Laurent Schwartz [3] avait montré que la synthèse spectrale est impossible. Le contre-exemple donné par Paul Malliavin au problème général de la synthèse spectrale est obtenu par la construction d'une fonction très irrégulière, et par l'étude de son ensemble de zéros. Dans le compte rendu de l'article [7] dans les *Mathematical Reviews*, le mathématicien Carl Herz écrivait : *The result has been ardently sought for several years for the additive group of real numbers ; no progress at all has been made until this strikingly original work*. Le théorème de Malliavin a été redémontré plusieurs fois par des méthodes différentes [6, 10, 16].

En 1960 et 1961, à Princeton, Beurling et Malliavin développent ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de « théorie de Beurling-Malliavin » [9, 11]. Ils y caractérisent certaines fonctions entières qui sont quotients de deux fonctions de type exponentiel, bornées sur la droite réelle, et calculent le rayon de totalité d'une suite de nombres réels ou complexes, autre question difficile d'analyse harmonique. Paul Malliavin considérait que son séjour à Princeton avait été l'une des périodes les plus heureuses de sa vie mathématique.

Les résultats évoqués précédemment placent Paul Malliavin au tout premier niveau parmi les analystes au plan international.

Paul Malliavin va s'intéresser à la théorie des probabilités, qu'il révolutionne dans ses concepts, et dans ses méthodes. Comprises comme une discipline de caractère expérimental à partir de la perception sensible du hasard interprété comme une réalité physique, les probabilités deviennent une théorie mathématique à part entière, à partir des bases posées en 1933 par Kolmogorov, qui les relie à la théorie de la mesure fondée par Lebesgue. Paul Lévy [4] avait réalisé le travail prodigieux d'étude à main nue de la trajectoire très irrégulière du mouvement brownien. Dans les années quarante et cinquante, Kyoshi Itô construit l'intégrale stochastique et le calcul différentiel stochastique, qui donnent un moyen de calculer tout aussi bien le long de ces trajectoires maximales irrégulières que le long de courbes parfaitement lisses. Itô découvre également les équations différentielles stochastiques.

Paul Malliavin aborde la théorie des probabilités avec un triple bagage d'analyste harmonicien, d'analyste complexe et de géomètre. Il découvre qu'il est possible de faire de l'analyse sur l'espace des trajectoires du mouvement brownien, comme on le fait sur \mathbf{R} ou sur une variété [13]. Aux solutions d'équations différentielles stochastiques de Itô, on peut appliquer un opérateur aux dérivées partielles en dimension infinie, l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck, de la même manière qu'on applique le laplacien aux fonctions sur \mathbf{R} , pour en déduire des formules d'intégration par parties. Ce nouveau calcul fonctionnel est aujourd'hui universellement connu sous le nom de calcul de Malliavin. Il est le pendant fonctionnel du calcul de Itô.

Paul Malliavin applique alors cette nouvelle machine à un problème de régularité (ou d'hypoellipticité) d'opérateurs aux dérivées partielles étudiés par Hörmander [12]. Il déduit cette régularité de l'inversibilité de la matrice de covariance de Malliavin, elle-même conséquence de l'irrégularité des trajectoires du mouvement brownien : le vice au service de la vertu !

Approfondissant les travaux d'Itô et Eells-Elworthy, Paul Malliavin utilise la méthode du repère mobile d'Élie Cartan pour donner une description intrinsèque du mouvement brownien géométrique [14]. Il suffit de munir la trajectoire brownienne d'un repère orthonormé qu'elle transporte parallèlement le long d'elle-même. La difficulté évidente est que cette trajectoire n'est nulle part différentiable, que le transport parallèle n'existe pas a priori... peu importe. Le calcul de Itô est là pour remédier à cette apparente contradiction. Paul Malliavin découvre les flots stochastiques, qui étendent aux équations de Itô une propriété

des équations différentielles ordinaires. Il invente un principe de comparaison entre solutions d'équations différentielles stochastiques pour comparer entre elles des variétés différentes... Je m'arrête.

Il faut bien admettre qu'à la fin des années soixante dix, le public capable de comprendre et de s'approprier un si grand nombre d'idées et de méthodes nouvelles, convoqué par la baguette d'un chef d'orchestre qui se jouait des difficultés de lecture de sa partition, se comptait sur les doigts d'une main. Il avait inventé, pour situer en anglais la place du fameux repère mobile qui accompagnait le mouvement brownien, le terme de *upstairs*, alors que le mouvement brownien lui-même se trouvait *downstairs*. Nous étions ainsi ballottés entre deux étages desservis par un mystérieux escalier, que son propriétaire pouvait, semblait-il, escamoter à son gré.

Il n'empêche : des probabilistes aux États-Unis, au Japon, en France, travaillent sur un sujet dont ils perçoivent la richesse, aidés et encouragés par Paul Malliavin. Il y a bien longtemps que cette bataille là a été gagnée, en France et ailleurs.

Je devrais décrire aussi ses travaux sur l'analyse harmonique sur l'espace des lacets d'un groupe de Lie [15], et sur la construction d'un mouvement brownien à valeurs dans les difféomorphismes du cercle. Des considérations de théorie des représentations l'ont poussé jusqu'à la fin de sa vie à étudier ce problème. Dans un travail mené avec Hélène Airault et Anton Thalmaier [17], il venait d'achever la construction de la diffusion correspondante, qu'on peut interpréter comme un mouvement brownien à valeurs dans les courbes de Jordan dans le plan complexe. C'est à ce résultat qu'était consacré son exposé de Pékin en Mai 2010.

Je passe aussi sur les applications qu'il avait données de l'analyse de Fourier et du calcul de Malliavin. La distinction entre mathématiques pures et appliquées ne l'intéressait guère.

Sur le plan mathématique, Paul Malliavin était un radical. Il avait été proche de Jean Dieudonné, Pierre Lelong, et Jean Leray. Des liens d'une vie avaient créé entre Jean-Pierre Kahane et lui une grande complicité. Plus récemment, il s'était rapproché de mathématiciens plus jeunes, tels Pierre-Louis Lions et Cédric Villani.

Il acceptait volontiers d'autres approches que la sienne aux problèmes qu'il avait abordés, voire aux théorèmes qu'il avait démontrés. J'ai retiré le sentiment que les mathématiques l'ont immensément amusé.

2. PAUL MALLIAVIN PROFESSEUR, ÉDITEUR ET ACADÉMICIEN

Paul Malliavin aura eu de nombreux élèves et disciples en France et à l'étranger. La richesse des thèmes qu'il avait abordés fournissait à ceux qui en avaient la volonté et la capacité des sujets de recherche sans fin. Certains de ses élèves sont d'ailleurs devenus ses collaborateurs. Il avait compris que la transmission directe était le meilleur moyen de rendre accessibles les théories difficiles qu'il avait développées. Il aura ainsi été un grand voyageur. Il se sera rendu très souvent en Chine, contribuant à la création d'une école chinoise de probabilités, formant des jeunes mathématiciens chinois, dont certains sont devenus professeurs en France. Le fait que la conférence donnée à Pékin en son honneur ait été organisée conjointement par des mathématiciens allemands et chinois ne devait rien au hasard.

Paul Malliavin aura été aussi l'éditeur d'un journal, le *Journal of Functional Analysis*, qu'il aura fait vivre de bout en bout. Ce journal fut créé en 1967 sous la direction conjointe de Paul Malliavin, Ralph Phillips, et Irving Segal, trois très fortes personnalités. Ce journal est devenu une référence pour les développements majeurs des mathématiques d'aujourd'hui. Paul Malliavin en est resté éditeur en chef jusqu'à son décès. Un volume du journal lui avait été dédié en 2008. Il aura également associé son nom à deux autres journaux : le Bulletin des Sciences Mathématiques, et le Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Paul Malliavin était membre de l'Académie des Sciences depuis 1979. C'est peu de dire qu'il en était fier. Il s'était passionné pour les comptes rendus de l'Académie, et spécifiquement pour sa série mathématique. Il exprimait ses positions sur le sujet avec passion et une extrême fermeté. Il continuait à suivre les travaux des très jeunes mathématiciens, qu'il lisait attentivement, et dont il promouvait les œuvres.

Esprit rapide et brillant, il défendait ses points de vue avec énergie, n'hésitant pas à manier une ironie souvent allègre. Quand le besoin s'en faisait sentir, il pouvait utiliser les ressources de l'ancienne éloquence, avec d'autant plus d'efficacité que rien ne permettait d'en présager l'usage, ajouterais-je, particulièrement de la part d'un mathématicien. La place de la science dans la société le passionnait. Il déplorait la perte de pouvoir des ingénieurs au profit des financiers dans les entreprises nationales.

Face à la Seine, dans la Bibliothèque Mazarine qu'il faisait visiter à Michèle Vergne [18], il citait Richelieu : « Je regretterai la beauté

de ces lieux dans l'au delà ». Dans un petit bureau de l'Institut Henri-Poincaré, où il m'est arrivé de le retrouver pour quelques heures, je pouvais recommencer l'histoire que je souhaitais lui raconter exactement au point où je l'avais laissée six mois auparavant, épiait ses réactions face aux turbulences d'objets qu'il avait découverts, dans un certain silence.

Il était membre de l'Académie des Sciences de Suède, de l'*Academy of Arts and Sciences*, et de l'Académie des Technologies, et docteur honoris causa de plusieurs Universités étrangères, dont la *Scuola Normale* de Pise et la *Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität* de Bonn. Il avait été membre du comité de la médaille Fields pour le Congrès Mondial de Mathématiques de 1982, tenu en 1983 à Varsovie.

3. CONCLUSION

Chez un mathématicien, l'œuvre écrite n'exprime qu'imparfaitement la stratification des savoirs, des espoirs et des doutes, à travers laquelle s'exprime sa personnalité scientifique. Paul Malliavin était une très forte personnalité, dans les mathématiques, et dans le monde.

Il nous appartient de saluer en Paul Malliavin la mémoire d'un très grand mathématicien, qui, dans la sphère qui était la sienne, aura changé le monde.

RÉFÉRENCES

- [1] I. Gelfand. Ideale und primäre Ideale in normierten Ringen. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, 9 (51) :41–48, 1941.
- [2] S. Mandelbrojt et N. Wiener. Sur les fonctions indéfiniment dérivables sur une demi-droite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 225 :978–980, 1947.
- [3] L. Schwartz. Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227 :424–426, 1948.
- [4] P. Lévy. *Le mouvement brownien*. Mémor. Sci. Math., no. 126. Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [5] P. Malliavin. Sur quelques procédés d'extrapolation. *Acta Math.*, 93 :179–255, 1955.
- [6] J.-P. Kahane. Sur un théorème de Paul Malliavin. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 :2943–2944, 1959.
- [7] P. Malliavin. Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1959 :85–92, 1959.
- [8] P. Malliavin. Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 :2155–2157, 1959.
- [9] A. Beurling et P. Malliavin. On Fourier transforms of measures with compact support. *Acta Math.*, 107 :291–309, 1962.

- [10] N. Varopoulos. Sur un théorème de M. Paul Malliavin. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 263 :A834–A836, 1966.
- [11] A. Beurling et P. Malliavin. On the closure of characters and the zeros of entire functions. *Acta Math.*, 118 :79–93, 1967.
- [12] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.
- [13] P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 195–263, New York, 1978. Wiley.
- [14] P. Malliavin. *Géométrie différentielle stochastique*, volume 64 of *Séminaire de Mathématiques Supérieures [Seminar on Higher Mathematics]*. Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1978. Notes prepared by Danièle Dehen et Dominique Michel.
- [15] M.-P. Malliavin et P. Malliavin. Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures. *J. Funct. Anal.*, 93(1) :207–237, 1990.
- [16] J.-P. Kahane et Y. Katznelson. Sur un théorème de Paul Malliavin. *J. Funct. Anal.*, 255(9) :2533–2544, 2008.
- [17] H. Airault, P. Malliavin, et A. Thalmaier. Brownian measures on Jordan-Virasoro curves associated to the Weil-Petersson metric. *J. Funct. Anal.*, 259(12) :3037–3079, 2010.
- [18] M. Vergne. Malliavin et moi. *Gaz. Math.*, (126) :111–113, 2010.