INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Séance solennelle de l'Académie des sciences / 13 juin 2006
Réception des Membres élus en 2005

La théorie de l'ambiguïté : de Galois aux systèmes dynamiques

Jean-Pierre Ramis

Devant parler en quelques minutes de l'aspect le plus significatif de mon oeuvre scientifique, j'ai choisi de vous présenter l'un des courants qui la traversent et la portent : la « théorie de l'ambiguïté ». Ce nom est dû à E. Galois et apparaît de façon assez mystérieuse (en relation avec la théorie des fonctions et celle des nombres) dans sa dernière lettre, écrite la nuit précédant son fatal duel. En dépit d'un fond d'incompréhension, le passage correspondant a inspiré des travaux fondamentaux d'E. Picard, J. Drach et S. Lie. J'y reviendrai. Le mystère a été, selon moi, levé au début des années quarante, quand G.D. Birkhoff a replacé la théorie de l'ambiguïté de Galois dans le cadre des réflexions de Leibniz sur diverses versions de son « principe de raison suffisante » (en particulier celle des lettres à Clarke), et l'a interprétée comme un cas particulier d'une théorie générale de « symétrie ». Cette théorie englobe diverses symétries de la physique comme les relativités (de Galilée et Einstein), auxquelles on pourrait aujourd'hui ajouter le modèle standard de la théorie des champs. À peu près à la même époque, H. Weyl a fait des réflexions analogues ; il me semble qu'elles ont rencontré aussi peu d'échos...

Voici comment je vois les choses. Il s'agit de symétries, mais en un sens assez subtil, qu'il faut radicalement distinguer du sens naïf. Prenons un carré de papier blanc aux sommets alternativement colorés de rouge et de vert. Si vous fermez les yeux et si je tourne mon carré d'un demi-tour, en les rouvrant, vous ne voyez aucune différence. Si je tourne seulement d'un quart de tour, vous voyez maintenant une différence : le rouge est devenu vert, mais vous ne savez pas dans quel sens j'ai tourné ! Il y a un groupe d'ambiguïté associé aux transformations indécelables pour vous : il a deux éléments, et, pour un observateur daltonien, il en aurait quatre (et on retomberait sur la symétrie naïve). Si je remplace le carré par une sphère de couleur blanche uniforme, que je fais tourner sur elle même, j'obtiens de même un groupe d'ambiguïté. C'est un groupe infini continu non commutatif de rotations spatiales (un exemple de groupe de Lie). Si je marque et colore un point particulier de ma sphère, ce groupe diminue: c'est maintenant le groupe continu commutatif des angles. Ces groupes ont des versions infinitésimales (espaces de rotations instantanées), qu'on appelle leurs « algèbres de Lie ».

On peut, à partir de ces deux situations simples, extraire un modèle abstrait : deux personnages différents A et B (ici vous et moi) observent ou manipulent un même « monde » (réduit ici au carré ou à la sphère), avec deux niveaux inégaux de connaissance de ce monde (si je sais exactement quelles transformations ont été faites, vous ne pouvez de votre côté que vérifier si les couleurs sont restées en place). Cette inégalité donne naissance à un groupe d'ambiguïté: il est formé des manipulations de l'un (B) invisibles pour l'autre (A). Voici un nouvel exemple: le monde est « l'ensemble des racines » d'une équation algébrique donnée (à coefficients entiers) ; B peut permuter arbitrairement ces racines, tandis que la seule connaissance possible pour A, sa seule façon de « voir le monde », est de regarder les combinaisons à valeurs entières des racines formées en utilisant seulement l'addition et la multiplication (et d'ainsi vérifier la conservation des lois du monde). Dans cet exemple, le groupe d'ambiguïté est le groupe de Galois classique. C'est un groupe fini. Remplaçons maintenant l'équation algébrique par une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Le nouveau monde est « l'espace des solutions » de cette équation et B peut permuter linéairement ces solutions. Pour observer le monde, A dispose de la dérivation, en plus des opérations algébriques sur les solutions et les polynômes. Dans ce cas le groupe d'ambiguïté est appelé « groupe de Galois différentiel » : on obtient ainsi la théorie de Galois différentielle ou théorie de Picard-Vessiot (introduite par E. Picard, à la fin du XIXe siècle, dans le prolongement du passage de la lettre de Galois évoqué plus haut). Ce nouveau groupe d'ambiguïté est un groupe continu, un groupe de Lie, et il a une version infinitésimale : son algèbre de Lie. Il est aisé de formuler de façon analogue la relativité de Galilée ou celle (restreinte) d'Einstein: les groupes d'ambiguïté sont le groupe de Galilée ou celui de Lorentz. Enfin, dans l'interprétation de Birkhoff, quand il rattache la théorie de l'ambiguïté au principe de raison suffisante de Leibniz, A est un habitant du monde créé et B est Dieu.

J'en viens maintenant aux systèmes dynamiques. Je ne parlerai, pour simplifier, que des systèmes continus, régis par des équations différentielles invariantes par translation temporelle. Vous pouvez penser à un pendule (à bras rigide ou élastique), à un système planétaire (soleil-terre, soleil-terre-lune...), ou à une toupie, un gyroscope, un satellite,...

Un problème très important et très ancien de la théorie des systèmes dynamiques est celui de « l'intégrabilité ». Il est bien difficile de définir la notion d'intégrabilité avec précision : un système intégrable (comme le gyroscope ou toupie symétrique de Lagrange) devra en tout cas être intégrable par quadratures et avoir « une évolution régulière » par opposition à un système chaotique (comme une toupie asymétrique). Mon travail porte essentiellement sur le cas Hamiltonien et l'intégrabilité au sens classique de J. Liouville, dont la définition est précise, mais ne peut être détaillée ici.

On (pensez au personnage B de tout à l'heure) considère classiquement le « flot » d'un système, traduisant son évolution en fonction de différentes conditions initiales. C'est un objet d'un type un peu compliqué à définir, généralisant les groupes, les mathématiciens l'appellent un « groupoïde ». Si maintenant (pensez au personnage A), on observe ce flot en utilisant uniquement une « boite à outils » limitée, essentiellement algébrique, une ambiguïté apparaît: avec ces « lunettes imparfaites », on ne peut pas voir le groupoïde initial, i.e. le flot, et l'on voit apparaître à sa place un groupoïde plus gros (`de Lie-Galois-Vessiot-Malgrange), défini par des équations aux dérivées partielles « rationnelles ». Ce dernier a (et c'est un gain substantiel!) une algèbre de Lie. J'ai montré que si l'on part d'un système Hamiltonien intégrable, cette algèbre de Lie est commutative. J'avais auparavant, en collaboration avec J. Morales-Ruiz, obtenu une version plus simple. « Choisissons » une trajectoire de notre système, puis « simplifions » celui-ci en le linéarisant le long de cette trajectoire : on obtient l'équation variationnelle de Poincaré. C'est une équation différentielle linéaire et l'on peut donc lui appliquer une des théories de l'ambiguïté évoquées plus haut : la théorie de Galois différentielle de Picard-Vessiot. Si l'on part d'un système Hamiltonien initial intégrable, nous avons montré qu'alors l'algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel correspondant est commutative. C'est la base de la « théorie de Morales-Ramis », développée aujourd'hui par de nombreux chercheurs. Elle a de très nombreuses applications et permet la solution d'une foule de problèmes classiques: problèmes à n-corps, problème de la Lune, problème du satellite, modèles cosmologiques, potentiels homogènes... Non seulement maints problèmes ouverts ont pu ainsi être résolus, mais la théorie a également permis, pour des problèmes déjà résolus, de remplacer des preuves très complexes par des arguments simples. Par exemple, en utilisant notre théorie, des collègues polonais ont pu prouver en quelques pages que les seules toupies intégrables sont celles d'Euler, Lagrange, S. Kowalevska; un problème qui a été beaucoup étudié durant plus de deux siècles et a fait couler beaucoup d'encre...

Toujours dans le cadre des systèmes dynamiques, j'ai trouvé des relations étroites entre la sommation des séries divergentes issues de ceux-ci (sommation que j'ai considérablement développée) et les théories de l'ambiguïté. On peut interpréter les différentes « sommes » comme les « branches » d'une fonction (analogues aux conjugués d'un nombre algébrique): ainsi, l'ambiguïté naît de la divergence. Ceci m'a conduit à construire un nouveau groupe fondamental, généralisant celui des topologues, que j'ai appelé groupe fondamental sauvage. Ce groupe a de très nombreuses applications, en particulier via ses représentations.

Pour terminer, en relation avec cette dernière direction, je citerai un travail récent d'A. Connes et M. Marcolli, qui ont montré comment, des divergences de la théorie quantique des champs, naît naturellement un groupe d'ambiguïté, le « groupe de Galois cosmique », qui agit sur les constantes physiques de la théorie.