INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Séance solennelle de l'Académie des sciences / 21 juin 2011
Réception des nouveaux Membres sous la coupole de l'Institut de France

Multiples facettes de la géométrie algébrique complexe

Claire Voisin

Multiples facettes de la géométrie algébrique complexe

Chères consoeurs, chers confrères, chers amis et collègues

Je me permettrai de dire quelques mots personnels pour commencer ce discours de réception, même si ce n'est peut-être pas adapté à une circonstance aussi solennelle. Je vais le faire car je pense que ce n'est pas par l'opération du Saint-Esprit que me voilà arrivée dans cette situation, amenée à m'exprimer sous cette coupole prestigieuse, mais bien grâce à des rencontres décisives aussi bien sur le plan personnel qu'intellectuel.

En 1982, j'ai rencontré Jean-Michel Coron, que j'ai épousé un an et demi plus tard. J'avais vingt ans, et bien sûr le regard que je portais alors sur l'existence était plutôt sombre. Je peux lui dire les mots d'Aragon : « *Que serais-je sans toi...* ». Quant à nos cinq enfants, qui sont presque tous ici aujourd'hui, il est difficile de dire à quel point chacun a contribué à élargir ma personnalité et mon existence. Merci à chacun d'entre eux d'être si différent, si intéressant, si aimant également !

Ma première rencontre avec les mathématiques s'est faite en 1979, lorsque j'ai suivi le cours de Math. Sup. de Denis Monasse. Les notions étaient nouvelles, le cours était dense, exigeant ; c'était remarquable ! Un autre cours extraordinaire que je peux mentionner a été le cours de topologie algébrique de Joseph Le Potier. On en sortait avec les concepts, les énoncés et leur démonstration, parfaitement et définitivement en place dans l'esprit.

J'ai commencé en 1983 mon DEA de géométrie algébrique sous la direction d'Arnaud Beauville, qui est ensuite devenu mon directeur de thèse. C'était une période où plusieurs écoles coexistaient dans ce domaine ; la fameuse école issue des séminaires de Grothendieck, bien sûr, mais aussi d'autres, telle l'école de théorie de Hodge, représentée surtout aux USA et initiée par Griffiths, qui s'appuyait sur la topologie, la géométrie différentielle et l'analyse complexe. Par Arnaud Beauville, j'ai appris, outre des mathématiques de très grande qualité, à louvoyer entre ces diverses manières d'aborder mon domaine. On m'a dit -c'est peut-être une légende mais je trouve cela très amusant- que l'un des grands articles de Griffiths sur les périodes des variétés algébriques avait été qualifié à l'époque par un rapporteur de « Mathématiques de l'âge de pierre ». Et c'est vrai dans une certaine mesure, si on pense que l'âge de pierre de la géométrie algébrique complexe correspond aux travaux de Riemann sur les périodes des courbes et des variétés abéliennes.

Les objets de la géométrie algébrique sont susceptibles d'être approchés par l'algèbre commutative bien sûr, puisqu'ils sont associés à la donnée d'un certain nombre de polynômes à plusieurs variables ; par la géométrie qui vise l'étude des sous-variétés, des fibrés vectoriels et, d'un point de vue un peu plus abstrait, des groupes de Chow ou cycles algébriques ; par l'arithmétique, qui tient compte du corps de définition, et enfin par la géométrie différentielle ou la topologie lorsqu'on considère des polynômes à coefficients réels ou complexes.

La géométrie algébrique complexe est la géométrie algébrique sur le corps des nombres complexes. Le premier fait important est que les polynômes ou fonctions rationnelles qu'on utilise en géométrie algébrique sont contenus dans la classe plus large des fonctions holomorphes, ce qui nous place dans le contexte plus général de la géométrie analytique ou même différentielle complexe. Cet élargissement permet de définir la notion de structures de Hodge associées à une variété projective complexe lisse.

C'est cette multiplicité d'outils et de points de vue qui est pour moi l'un des plus grands attraits du sujet. Prenons l'exemple de l'algèbre et de la géométrie : j'ai travaillé en 2002 sur les « syzygies » des courbes canoniquement plongées, et ai montré une version générique d'une conjecture de Mark Green. Les syzygies introduites par Hilbert sont des objets de l'algèbre commutative associés à des modules gradués de type fini sur un anneau de polynômes. Elles sont très difficiles à calculer, même dans leur version moderne proposée par Green. Ce qui m'a permis de progresser sur le sujet est une réinterprétation géométrique de ces syzygies, en termes de sections de fibrés en droites sur une variété auxiliaire. Cette reformulation était très simple, mais elle a été décisive, et le reste du travail a été surtout une affaire de technique.

Dans un tout autre ordre d'idées, le fameux « Principe GAGA » de Serre, l'un des théorèmes les plus profonds de la géométrie algébrique complexe, dit que lorsqu'on considère une variété projective X définie sur le corps des nombres complexes comme une variété complexe X_{an} avec ses fonctions holomorphes et sa topologie usuelle, tous les calculs cohomologiques faits dans le cadre algébrique restent valides dans le cadre analytique (et vice-versa). C'est un miracle, qui a permis à Grothendieck de donner une version du théorème de de Rham dans ce contexte, disant que les formes différentielles algébriques sur X permettent de calculer (par l'algèbre, donc) la cohomologie de Betti (qui est a priori un invariant topologique) de la variété analytique X_{an}.

La théorie de Hodge telle que développée par Griffiths n'utilise que la variété analytique X_{an}. Elle s'étend même au cadre plus général des variétés kählériennes compactes, qui nous fait sortir du cadre de la géométrie algébrique. Un de mes meilleurs résultats concerne l'existence de variétés kählériennes compactes non homéomorphes à des variétés projectives complexes ; ainsi le théorème de Kodaira disant qu'une surface kählérienne compacte est une déformation d'une surface projective n'est pas vrai, même sous une forme très affaiblie, en dimension supérieure. Je n'ai eu à utiliser pour cela que des raisonnements assez simples et de nature algébrique concernant les structures de Hodge et leurs polarisations.

Mais par ailleurs, dans ces dernières années, il est apparu de plus en plus clairement que l'étude des structures de Hodge de X_{an}, non complétée par l'étude du « motif », c'est-à-dire sans prendre compte les comparaisons avec les autres théories cohomologiques, n'est probablement pas suffisante pour aborder les grandes conjectures telles que les conjectures de Hodge, Bloch, Bloch-Beilinson. L'importance de la théorie des motifs telle que conçue par Grothendieck et développée par Deligne se manifeste donc en force désormais à l'intérieur de ce sujet originellement développé par Griffiths uniquement à l'aide d'outils transcendants.

Dans ces quelques exemples, c'est l'importance de la perméabilité des différents thèmes et modes de pensée qui est illustrée. La souplesse, que j'ai qualifiée de façon peut-être péjorative de louvoiement, qui permet de tirer parti des outils et concepts proposés par différents domaines en interaction, et de changer librement de point de vue sur les mêmes objets, est en fait très importante à mon sens pour progresser.

Je vous remercie de votre attention.