INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Réception des Associés étrangers élus en 2005 / 12 décembre 2006

À LA RECHERCHE DU TEMPS PERDU

Yuri I. MANIN
Professeur de Mathématique
Northwestern University d'Evanston (États-Unis) et
Institut Max Planck de Mathématique, Bonn (Allemagne)

Je suis honoré par cette élection à l'Académie des sciences.

L'arrière plan de presque toutes mes recherches est la géométrie algébrique. Au centre de cette discipline, on trouve l'étude des systèmes d'équations polynomiales à plusieurs indéterminées. Une fois fixées ces équations, on imagine que l'ensemble de leurs solutions, des suites finies de nombres complexes, forment une entité géométrique, une forme située dans un espace multidimensionnel, qui s'étend jusqu'à l'infini dans certaines directions et se replie capricieusement dans d'autres.

La variété et la complexité de telles formes sont infiniment plus riches que tout ce qu'on aperçoit dans les expositions modernes d'art abstrait, mais les géomètres algébriques ont réussi à trouver des structures, à découvrir des connexions et des lois dans ce monde immense.

Je me suis surtout intéressé aux applications de la géométrie algébrique à la théorie des nombres et à la physique théorique. Un des plus vieux problèmes de théorie des nombres, qui remonte aux anciens Grecs et porte le nom de Diophante d'Alexandrie (vers 250 avant J.-C.), concerne également les solutions d'équations polynomiales, mais cette fois on suppose que les coefficients des polynômes en question sont des entiers et l'on demande : existe-t-il une solution dont toutes les coordonnées sont des entiers (un point d'un réseau) ou des nombres rationnels? Combien de telles solutions peut-on s'attendre à trouver ?

Ce qui m'a le plus fasciné fut la lente compréhension progressive que les réponses à ces questions dépendaient de façon cruciale de la forme géométrique de l'espace de toutes les solutions complexes. Par exemple, l'espace de toutes les solutions complexes peut être de dimension deux et semblable à la surface d'une sphère ou d'un tore, ou posséder deux anses ou plus. Le nombre de ces anses s'appelle le genre; c'est un invariant topologique très robuste du système d'équations, qui a visiblement peu à voir avec les subtilités arithmétiques et l'ensemble discret des solutions à coordonnées entières d'un système diophantien. Pourtant, le genre détermine pour l'essentiel quand le nombre de solutions rationnelles peut être infini : ce n'est jamais le cas s'il y a plus que deux anses. Il s'agit-là de la célèbre conjecture de Mordell, à laquelle je me suis attaqué dans les années soixante, avec un succès partiel, en introduisant un nouvel outil technique qui devint très populaire et prit plus tard le nom de connexion de Gauss-Manin.

Plus récemment, j'ai lancé un programme visant à établir, en toutes dimensions, comment des caractéristiques topologiques de la variété des solutions complexes déterminent le comportement asymptotique du nombre des solutions entières sur cette variété situées dans un cube de taille croissante. La boite à outils mathématiques de la physique théorique ne contenait que de la géométrie algébrique rudimentaire jusqu'à la seconde moitié du vingtième siècle, quand la machinerie des champs quantiques et en particulier celle des cordes quantiques a mis ces outils à l'honneur. L'image visuelle de la ligne d'univers d'une particule élémentaire ponctuelle fut remplacée par la surface d'univers ressemble encore à une surface avec des anses (surface de Riemann) et son genre, le nombre d'anses, correspond au nombre de boucles dans les différentes amplitudes de Feynman qui constituent, depuis les années quarante, la principale machinerie théorique et calculatoire de la théorie quantique des champs.

Un de mes résultats dans l'étude des cordes quantiques qui m'a beaucoup plu fut le calcul de ce qu'on appelle la mesure de Polyakov sur l'espace de modules des surfaces de Riemann. Il s'est trouvé que cette mesure peut être construite à partir des mêmes composants arithmétiques qui jouaient un rôle essentiel dans la preuve finale par Gerd Faltings de la conjecture de Mordell sur les équations diophantiennes. En fait, ce sentiment platonique que même les plus absconses des idées mathématiques sont en quelque sorte prédestinées à être en harmonie avec le monde physique, a toujours été pour moi un des attraits les plus irrésistibles de notre activité. Stéphane Mallarmé voulait nous faire saisir que la poésie est faite de mots et non d'idées. Jusqu'à un certain point, c'est vrai aussi des mathématiques, mais dans un sens plus profond c'est fondamentalement faux (et je suspecte que c'est faux aussi pour la poésie). Les mathématiciens ont développé un comportement discursif particulier qu'on pourrait appeler une "culture des définitions". Dans cette culture, de grands efforts sont consacrés à la clarification du contenu (sémantique) des notions abstraites fondamentales et à la syntaxe de leurs relations mutuelles, alors que le choix des mots (et, à un degré plus grand, celui des notations) pour exprimer les idées est une question secondaire et une convention largement arbitraire, dictée par la commodité, par des considérations esthétiques, et par le désir d'évoquer des connotations adéquates. On peut remarquer le contraste avec certaines habitudes du discours littéraire où des termes comme "Dasein" ou "différence" sont utilisés comme les marqueurs rigides d'une certaine tradition, sans grand souci de leur signification.

En essayant de comprendre la dimension linguistique des mathématiques, je fus amené à étendre la notion de complexité de Kolmogorov, à initier le projet d'ordinateur quantique et à contribuer à la théorie des codes correcteurs d'erreurs. En fait, j'ai toujours été fasciné par le langage et son fonctionnement, aussi bien dans les mathématiques et dans la logique mathématique contemporaines, que dans ses étapes préhistoriques, à propos desquelles nous ne pouvons que spéculer. Moscou des années 1960 à 1980, où j'ai passé la période la plus créatrice de ma vie, était aussi bouillante d'études littéraires et de recherches du sens de la culture, de l'histoire et de la psychologie. J'avais la joie de participer à des séminaires et des conférences organisés par mes amis linguistes et phylologistes, de donner des exposés et de publier des articles amateurs sur des sujets allant de la figure de l'escroc dans la mythologie jusqu'à l'épistémologie de Lévi Strauss.

Je vous remercie de votre attention.

IN SEARCH OF LOST TIME

I am honoured by the election to the Academy of Sciences.

The background of most research in which I have been engaged is Algebraic Geometry. Its centrepiece is the study of solutions of systems of polynomial equations with many indeterminates. When equations are given and fixed, we imagine the set of all their solutions, consisting of rows of complex numbers, as a geometric entity, a shape situated in a multidimensional space, stretching to infinity along some directions and capriciously closing upon itself at others. Variety and complexity of such forms is infinitely richer than anything one could glimpse at modern exhibitions of abstract art, but algebraic geometers managed to find patterns, discover connections and laws of this immense world.

I was primarily interested in applications of Algebraic Geometry to Number Theory and to Theoretical Physics. One of the oldest problems in number theory, going back to the ancient Greeks and bearing the name of Diophantus of Alexandria (ca 250 BC), also concerns solutions of polynomial equations, but this time one assumes that coefficients of the polynomes in question are integers, and one asks: it Is there a solution whose all coordinates are integers (lattice points) or rational numbers? How many such solutions can one expect to find?} What most fascinated me was the slowly emerging understanding that the answers to these questions critically depended on the geometric shape of the space of all complex solutions. For example, the space of all complex solutions can be two--dimensional, and similar to the surface of a sphere, or of a torus, or of a more complicated handlebody with two or more handles. The number of the handles is the so called {\it genus}, a very robust topological invariant of the system of equations, ostensibly having little to do with arithmetic subtleties and discrete lattice points of a Diophantine system. Nevertheless, the genus essentially determines when the set of rational solutions can be infinite: {\it never, if there are at least two handles. This is the celebrated Mordell Conjecture which I tried to attack in the sixties, with a partial success, introducing a new technical tool that became quite popular and was later named the Gauss--Manin connection.

More recently, I have launched a program which purports to establish, in arbitrary dimension, how some topological characteristics of the variety of complex solutions determine the asymptotic behaviour of the number of those lattice points on this variety, which are situated in a cube of growing size. Mathematics toolkit of Theoretical Physics did not include more than rudimentary Algebraic Geometry until the second half of the twentieth century, when the machinery of quantum fields and especially of quantum strings put these tools into foreground. The visual image of the world line of a point--like elementary particle was replaced by that of the world sheet of a small string. Such a world sheet again looks as a surface of a handlebody (Riemann surface), and its genus, the number of handles, corresponds to the number of loops in various Feynman amplitudes which since the 1940's formed the main theoretical and computational machinery of quantum field theory.

One of my results in this study of quantum strings which I greatly enjoyed was the calculation of the so called Polyakov measure on the moduli spaces of Riemann surfaces. It turned out that this measure can be built up from the same arithmetical components that played a prominent role in the Gerd Faltings final proof of the Mordell Conjecture on Diophantine equations. In fact, this Platonic feeling that even most abstruse mathematical ideas are somehow predestined to be in harmony with the physical world, always constituted *for me one of the most irresistible attractions of our trade. Stéphane Mallarmé wanted to make us aware that poetry is made of words rather than ideas. To a certain degree, this is true about mathematics as well, but in a more profound sense, this is fundamentally wrong. (I suspect that this is wrong for poetry as well). Mathematicians developed a peculiar discursive behaviour which might be called "culture of definitions". In this culture, great efforts are invested into clarification of the content (semantics) of basic abstract {\it notions} and syntax of their interrelations, whereas the choice of {\it words} (and, even to a larger degree, {\it notations}) expressing ideas is a secondary matter and largely arbitrary convention, dictated by convenience, aesthetic considerations, and by the desire to invoke appropriate connotations. This can be contrasted with some habits of humanistic discourse where such terms as {Dasein} or {difference} are rigidly used as markers of a certain tradition, without much fuss about their meaning.*

Trying to understand the linguistic dimension of mathematics, I was led to an extension of the notion of Kolmogorov complexity, initiated the project of quantum computation, and contributed to the theory of error--correcting codes. In fact, Language and its functioning, both in contemporary mathematics and mathematical logic, and at its very early pre--historical stages about which we can only speculate, permanently fascinated me. Moscow of the 1960's -- 1980's, where I spent the most creative time of my life, was also boiling with humanities studies and quests for meaning of human culture, history, and psychology. I was happily participating in seminars and conferences organized by my friends linguists and philologists, delivered talks and published amateurish papers on subjects ranging from trickster figure in mythology to the epistemology of Lévi--Strauss.

Thank you for your attention.