

# Un aperçu informel et presque chronologique de mes travaux

Wendelin Werner

## Introduction et premiers travaux.

Ma spécialité est la théorie des probabilités, et plus précisément, des processus stochastiques. Rappelons qu'un processus stochastique est simplement une famille d'objets aléatoires, souvent indexés par le temps ou l'espace. Dans le cas où l'on étudie une évolution temporelle aléatoire, cette théorie s'est construite de manière tout à fait spectaculaire pendant la seconde moitié du XXème siècle, depuis les travaux fondateurs de Kiyoshi Itô et Paul Lévy. Nous allons tout d'abord en mentionner quelques aspects sur lesquels nous reviendrons. Le mouvement brownien y joue un objet tout à fait central. Voici quelques unes de ses propriétés:

1. On peut voir le mouvement brownien unidimensionnel  $(B_t, t \geq 0)$  comme une fonction réelle continue aléatoire, telle que pour tous  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ , les variables  $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$  sont indépendantes. On dit qu'elle est à accroissements indépendants.
2. En outre, la loi de la variable  $B_{t_2} - B_{t_1}$  ne dépend que de  $t_2 - t_1$ . On dit que les accroissements sont stationnaires.
3. L'espérance de  $B_{t_2} - B_{t_1}$  existe et est nulle. On dit que les accroissements sont sans biais.

En fait, le mouvement brownien et ses multiples sont les seules fonctions aléatoires continues à accroissements indépendants stationnaires et sans biais. Il est à noter que:

- Si l'on n'impose pas la continuité des trajectoires, on obtient une classe (plus vaste) de processus de Lévy, dont nous ne parlerons pas ici.
- Si l'on n'impose pas au processus d'être sans biais, on obtient comme seuls processus possibles les mouvements browniens avec dérive, c'est à dire les processus du type  $(aB_t + bt, t \geq 0)$  où  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien, et  $a, b$  sont deux constantes.

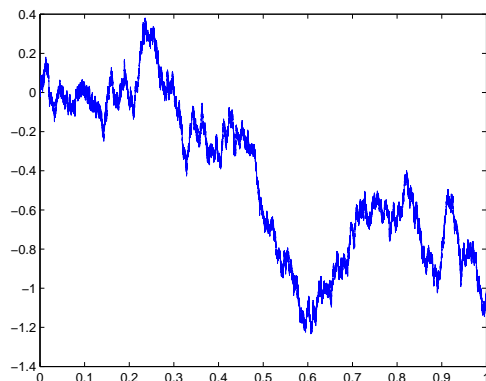


Figure 1: Une trajectoire de mouvement brownien

Une manière intuitive de comprendre le mouvement brownien consiste à le voir comme la limite proprement normalisée d'une longue marche aléatoire. Supposons que  $(X_i, i \geq 1)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, de mêmes lois, telle que  $E(X_1) = 0$  (sans biais) et  $E(X_1^2) = 1$ . On définit alors  $S_0 = 0$ , et pour tout entier  $n \geq 1$ , la marche aléatoire  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , que l'on interpole ensuite linéairement pour en faire une fonction  $S(t)$  définie pour tout réel positif  $t$ . Alors, pour tout  $T$  fixé, la loi de  $(S_{At}/\sqrt{A}, t \leq T)$  (en tant que loi sur l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, T]$  muni de la topologie de la convergence uniforme) converge faiblement lorsque  $A \rightarrow \infty$  vers la loi du mouvement brownien.

Ainsi, et c'est l'une des autres définitions possibles, on peut voir que le mouvement brownien est un processus gaussien. En particulier, l'accroissement  $B_{t_2} - B_{t_1}$  suit une loi Gaussienne centrée de variance  $t_2 - t_1$ .

Le mouvement brownien peut être utilisé pour définir une classe plus vaste de processus stochastiques: les diffusions. Sans rentrer ici dans les détails, mentionnons tout de même que l'on peut, grâce à la théorie du calcul stochastique, définir de manière univoque pour une large classe de fonctions  $\sigma$  et  $b$ , le processus  $(X_t, t \geq 0)$  tel que  $X_0 = 0$  et

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt.$$

Intuitivement,  $X$  se comporte à chaque instant  $t$  comme un mouvement brownien (multiplié par  $\sigma(X_t)$ ) avec dérive (donnée par  $b(X_t)$ ). Le résultat précédemment mentionné concernant le mouvement brownien avec dérive peut alors être étendu. Grosso modo, les solutions de telles équations différentielles stochastiques sont (presque) les seuls processus de Markov (c'est à dire que la loi de  $(X_{t+s}, s \geq 0)$  ne dépend du passé avant  $t$  que via la donnée de  $X_t$ ) à trajectoires continues.

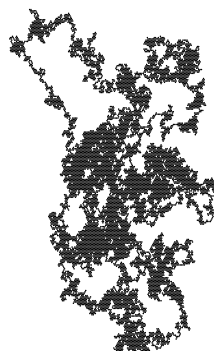


Figure 2: Une portion de trajectoire brownienne plane

Ainsi, on voit que pour une large et naturelle classe de processus continus, la décomposition en “bruit gaussien” et dérive est possible. En fait, ce type de résultat n’est pas propre aux processus unidimensionnels. Même si les choses sont bien entendu plus compliquées, la même philosophie s’applique de manière plus générale à tous les processus de Markov continus en dimension finie.

Ainsi, on peut dire que (presque) tous les processus de Markov raisonnablement réguliers et à trajectoires continues en dimension finie sont en quelque sorte des variantes du mouvement brownien et sont liés aux lois gaussiennes.

Si l’on devait essayer de dégager un thème général de mes travaux, ce serait sans doute la recherche, la définition et l’étude de processus aléatoires inspirés par la physique qui sortent de ce cadre.

Avant de les décrire, rappelons en quelques mots certains résultats important concernant le mouvement brownien en plusieurs dimensions: Il est possible et facile de définir une trajectoire Brownienne dans le plan ou dans l’espace. On s’intéresse alors aux propriétés de celles-ci. On peut être motivé par une simple curiosité mathématique, mais ces questions sont aussi souvent directement liées à certains phénomènes réels ou à des considérations de physique théorique.

En dimension deux, la géométrie d’une trajectoire plane est particulièrement surprenante. La dimension fractale (de Hausdorff) de la courbe est 2 (mais elle couvre une aire nulle), elle possède des points multiples de tous ordres. De nombreux travaux de Erdős, Taylor, Kakutani, Dynkin, Rosen, Yor, Le Gall et d’autres ont apporté des résultats précis de ce type. Citons-en un autre, énoncé en 1958 par Dvoretzky, Erdős et Kakutani pour illustrer la tortuosité d’une courbe brownienne: il existe presque sûrement des points où le mouvement brownien plan passe un ensemble non dénombrable de fois avant l’instant 1.

Le mouvement brownien est directement relié au Laplacien, aux fonctions harmoniques et à l’équation de la chaleur. Il peut ainsi être un outil utile pour démontrer des résultats sur ces objets. Par exemple, dans un court article avec

Chris Burdzy, nous avons montré via un argument probabiliste utilisant une idée de couplage le résultat suivant (qui donne un contre-exemple à la conjecture dite des points chauds): Il est possible de trouver un domaine plan pour lequel la deuxième fonction propre du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord (la première fonction propre étant la fonction constante) admet son maximum ailleurs qu'au bord du domaine. En d'autres termes, si on laisse le domaine isolé à partir d'une répartition de température générique, alors la température va s'homogénéiser mais le point le plus chaud va aller vers le centre du domaine et non vers le bord.

Mes premiers travaux, effectués dans le cadre de ma thèse de doctorat sous la direction de Jean-François Le Gall ont porté sur les propriétés des trajectoires du mouvement brownien plan. Je me suis ainsi intéressé aux temps locaux d'intersection (qui mesurent en quelque sorte une quantité d'auto-intersections), au nombre et à la forme des petits trous dessinés par la trajectoire et au nombre de tours effectués par celle-ci autour de ces trous. On peut par exemple mentionner le résultat suivant: Si l'on numérote les composantes connexes du complémentaires de la trajectoire brownienne plane  $(B_t, t \leq 1)$  par taille décroissante,  $C_1, C_2, \dots$  alors, il existe une loi limite pour la "forme" de  $C_n$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et il y a une sorte de moyennisation sur chaque trajectoire: Pour toute fonction  $F$  ne dépendant que de la "forme" d'un domaine, alors la moyenne  $(F(C_1) + \dots + F(C_n))/n$  converge lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers la moyenne de  $F$  pour cette loi.

L'étude du mouvement brownien plan est étroitement associée au nom de Paul Lévy qui a été l'un des pionniers sur ces questions. Il a par exemple défini et déterminé la loi de l'aire stochastique balayée par un mouvement brownien. L'aire stochastique est une quantité définie de manière dynamique par rapport au temps, via une intégrale stochastique (qui n'est donc pas absolument convergente, il faut utiliser la théorie d'Itô pour la définir). Dans le prolongement des questions sur le nombre de tours du mouvement brownien plan, je me suis alors demandé si cette intégrale stochastique pouvait être interprétée comme une véritable aire (i.e. via l'intégrale dans le plan de l'indice d'un lacet). Ceci s'avère effectivement possible, et il faut alors choisir une convention de normalisation car la valeur absolue de l'indice n'est pas intégrable (elle explose près de la courbe), comme par exemple enlever un voisinage de la courbe que l'on fait ensuite disparaître.

Un autre résultat important de Paul Lévy est l'invariance du mouvement brownien plan par les transformations conformes. Cette propriété qui est centrale pour beaucoup de mes travaux peut s'énoncer comme suit: Considérons un mouvement brownien plan  $(B_t)$  issu d'un point  $x$ , arrêté au premier instant  $T$  où il sort d'un domaine ouvert simplement connexe  $D$ . Soit  $\Phi$  une bijection qui préserve les angles de  $D$  dans un autre domaine  $D'$ . Alors la trajectoire image de  $B$  par  $\Phi$  est, à un changement de l'échelle de temps près, une trajectoire brownienne issue de  $x' = \Phi(x)$  arrêtée au premier instant où elle sort de  $D'$ . Cette propriété a été d'ailleurs souvent utilisée dans les travaux sus-mentionnés.

Articles mentionnés dans ce paragraphe:

- Sur les singularités des temps locaux d'intersection de mouvement brownien plan, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 29, 391-418 (1993)
- Sur la forme des composantes connexes du complémentaire de la courbe brownienne plane, *Probability Theory and Related Fields*, 98, 307-337 (1994)
- Sur l'ensemble des points autour desquels le mouvement brownien plan tourne beaucoup, *Probability Theory and Related Fields*, 99, 111-142 (1994)
- Formule de Green, lacet brownien plan et aire de Lévy, *Stochastic Processes and their applications*, 57, 225-245 (1995)
- A counterexample to the hot spots conjecture en collaboration avec Krzysztof Burdzy, *Annals of Mathematics* 149, 309-317 (1999)

### **Exposants critiques du mouvement brownien: Premières tentatives.**

L'un des groupes de travail organisés au laboratoire de probabilités de l'université Pierre-et-Marie-Curie (à Jussieu) pendant que j'y préparais ma thèse, se proposait d'étudier une série d'articles alors récents de Chris Burdzy et Greg Lawler sur les exposants d'intersection de marches aléatoires planes et de mouvements browniens plans. Dans ces articles, les auteurs définissaient ces exposants browniens, montraient qu'ils étaient les mêmes que pour les marches aléatoires planes, et donnaient des encadrements pour leurs valeurs. Voici la définition de l'exposant d'intersection le plus simple: On considère deux mouvements browniens plans  $X$  et  $Y$  issus de deux points fixés distincts. On cherche à évaluer la probabilité pour que les trajectoires de  $X$  et de  $Y$  restent disjointes jusqu'à un temps  $t$  grand. Plus précisément, on étudie la probabilité pour que pour tous  $s$  et  $s'$  dans l'intervalle  $[0, t]$ ,  $X_s \neq Y_{s'}$ . Il n'est pas très difficile de voir qu'asymptotiquement, cette probabilité décroît comme  $1/t$  à une certaine puissance  $\xi$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . C'est ce nombre  $\xi$  que l'on appelle l'exposant d'intersection.

L'étude de tels exposants avait été initiée en particulier par Michael Aizenman qui avait suggéré qu'ils pouvaient être des exemples intéressants d'exposants critiques bi-dimensionnels, peut-être plus accessible pour les mathématiciens que les autres exposants critiques pour les modèles issus de la physique statistique dont nous allons parler un peu plus loin, en raison du fait que l'invariance conforme du mouvement brownien était alors bien comprise (ce qui n'était pas le cas de ces autres modèles). En se basant sur des simulations et l'hypothèse que ces exposants devaient se trouver dans la table de Kac des plus hauts poids de certaines représentations d'algèbres de Lie de dimension infinie, les physiciens théoriciens Bertrand Duplantier et K.H. Kwon avaient conjecturé la valeur de tels exposants en 1987. La valeur proposée pour l'exposant  $\xi$  mentionné ci-dessus était  $5/8$ .

Greg Lawler a aussi montré que ces exposants sont reliés directement à certaines dimension fractales. Par exemple, la dimension de l'ensemble des

temps  $t \in [0, 1]$  tels que  $B[0, t] \cap B(t, 1] = \emptyset$  (ce sont les temps de coupure de la trajectoire) est  $1 - \xi$ . Ceci permet de relier ce type d'exposant (en fait un exposant dit de disconnexion) à une autre conjecture, due à Benoît Mandelbrot: La dimension fractale du bord des trous dans une courbe brownienne plane est  $4/3$ . En effet, cette dimension vaut  $2 - \eta$  où  $\eta$  est un exposant de disconnexion qui mesure le comportement asymptotique d'une probabilité de non-disconnexion (au lieu de la non-intersection entre trajectoires qui intervenait dans le cas de  $\xi$ ). C'est lors d'une table ronde organisée à Saint-Chéron par Marc Yor, en présence de J.F. Le Gall, G. Lawler, B. Duplantier et T. Lyons que j'ai pu avoir une vue d'ensemble de ces problèmes. Signalons également la conjecture suivante, due à B. Nienhuis, qui a également inspiré la conjecture de Mandelbrot. Si l'on choisit au hasard parmi tous les chemins possibles sur un réseau plan régulier, un chemin continu de longueur  $n$  qui ne repasse pas deux fois par le même point, alors (avec grande probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ ), le point d'arrivée sera à une distance de l'ordre de  $n^{3/4}$  du point de départ. On résume parfois cette conjecture en disant que les longues marches auto-évitantes ont une dimension fractale  $4/3$  (on fait aussi souvent référence au chimiste Flory qui a le premier suggéré cette valeur voici plus de cinquante ans maintenant).

Toutes ces conjectures semblaient alors hors de portée de l'arsenal traditionnel du calcul stochastique. Une raison est qu'elles font intervenir des intersections entre l'ensemble des trajectoires et que si l'on veut étudier ces probabilités sous une forme "dynamique" au cours du temps, il faut garder en mémoire une information sur l'ensemble des points déjà visités (et cette information n'est clairement pas de dimension finie). Il était possible d'exploiter l'invariance conforme du mouvement brownien plan pour obtenir des majorations ou des minoration, mais celles-ci restaient assez loin des valeurs simulées ou conjecturées. L'un de mes premiers travaux sur le sujet a d'ailleurs été de prouver une minoration du type  $\eta < .9999$ . Ceci reste assez loin de la conjecture de Mandelbrot  $\eta = 2/3$  mais elle possède l'avantage de montrer simplement que la dimension fractale du bord brownien est bien strictement supérieure à 1, ce qui n'est à vrai dire pas vraiment suprenant.

On peut définir toute une famille d'exposants d'intersection. Par exemple, on peut définir l'exposant  $\xi(n, p)$  associé à l'événement que  $n$  mouvement browniens indépendants issus de  $x$  restent disjoints de  $p$  mouvements browniens issus de  $y$  pendant un long temps  $t$ . L'un des premiers résultats de Lawler avait d'ailleurs été de montrer que l'exposant  $\xi(2, 1)$  était très particulier et qu'il pouvait être déterminé directement par un argument simple qui montre que  $\xi(2, 1) = 1$ .

Mon deuxième travail sur le sujet, également effectué durant mon post-doctorat à Cambridge, a été d'étudier  $\xi(n, p)$  lorsque  $n$  et  $p$  tendent vers l'infini. Intuitivement, il est alors assez facile de comprendre ce qui se passe. Si l'on considère  $\xi(an, bn)$  pour  $n$  grand avec  $a$  et  $b$  fixés, alors les deux paquets de mouvement browniens vont grosso modo chacun occuper un cône choisi de manière optimale en fonction de la "pression" relative de  $a$  et  $b$ . En exploitant l'invariance conforme, on peut ainsi montrer que  $\xi(an, bn) \sim n(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2/4$ .

Dans un travail en collaboration avec Gregory Lawler (alors à Duke University aux Etats-Unis), nous avons ensuite combiné plusieurs idées, qui permettent

de relier les exposants d'intersection entre eux via certaines relations fonctionnelles. L'une de ces idées était de voir dans le cas des exposants d'intersection, que l'on pouvait par exemple remplacer des paquets de mouvements brownien ne s'intersectant pas par la réunion d'un certain nombre de mouvements browniens indépendants. Ainsi plusieurs objets invariants conformes étaient d'une certaine façon équivalents pour ce qui concerne leurs exposants. Pour cela, il fallait d'une part utiliser les exposants d'intersection dans un demi-espace, généraliser les définitions des exposants (comme  $\xi(n, p)$  ci-dessus) à des valeurs non-entières de  $n$  et  $p$  et utiliser de manière répétée l'invariance conforme du mouvement brownien plan. Ces relations fonctionnelles avaient une conséquence intéressante: La conjecture de Mandelbrot était effectivement compatible avec les conjectures de Duplantier et Kwon, dont elle était en quelque sorte le prolongement analytique. En outre, le physicien Bertrand Duplantier a reconnu dans nos relations fonctionnelles, des relations typiques de "gravité quantique", et cette dernière théorie lui a fourni une autre approche (non-rigoureuse) permettant de prédire la valeur de ces exposants.

Articles mentionnés dans ce paragraphe:

- On Brownian disconnection exponents, Bernoulli, 1, 371-380 (1995).
- No triple point of planar Brownian motion is accessible, en collaboration avec Krzysztof Burdzy, Annals of Probability 24, 125-147 (1996).
- Bounds for disconnection exponents, Electronic Communications in Probability, 1, 19-28 (paper no.4) (1996)
- Asymptotic behaviour of disconnection and non-intersection exponents, Probability Theory and related Fields, 108, 131-152 (1997)

### La marche auto-réulsive en dimension 1.

Nous faisons maintenant une petite parenthèse en nous écartant des phénomènes bi-dimensionnels. Lorsque l'on considère des trajectoires aléatoires qui interagissent avec elles-mêmes, deux approches sont possibles. La première provient du formalisme de la physique statistique. On se donne un ensemble de trajectoires possibles (par exemple, les trajectoires avec  $n$  pas) et on attribue à chaque trajectoire  $\gamma$  une énergie  $H(\gamma)$ . Puis, on définit la loi de probabilité de sorte que la probabilité de  $\gamma$  soit proportionnelle à  $e^{-H(\gamma)}$ . Dans ce cas, on choisit d'un seul coup la trajectoire entière. La seconde approche consiste à définir la trajectoire de manière dynamique, un peu comme une solution d'équation différentielle stochastique. On définit successivement  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  etc. et le choix de  $\gamma_{n+1}$  sachant  $\gamma[0, n]$  suit une loi assez simple.

A ce moment-là, je m'intéressais également aux propriétés de certaines marches aléatoires en dimension un, avec mémoire. Ce sont d'une certaine façon les analogues en dimension un des marches auto-évitantes en dimension 2. Dans le cas de la dimension 1, il faut bien entendu remplacer l'hypothèse d'auto-évitement strict par une pénalisation, fonction du nombre d'auto-intersections; ce sont

des marches auto-répulsives. Un cas naturel à considérer est celui des “vraies” marches, définies de manière à la fois dynamique et locale. A chaque instant, la marche choisit d’aller vers la droite ou vers la gauche, en fonction des nombres de visites qu’elle a déjà effectuées sur l’arête immédiatement à sa droite et sur l’arête immédiatement à sa gauche. Si l’on note  $\ell^+(n)$  et  $\ell^-(n)$  ces nombres de visites à l’instant  $n$ , on peut par exemple considérer une marche  $(X_n, n \geq 0)$  à valeurs entières telle que

$$P(X_{n+1} = X_n + 1 | X_0, \dots, X_n) = f(\ell_n^- - \ell_n^+)$$

pour une certaine fonction  $f$ . Lorsque  $f(x)$  croit rapidement vers 1 lorsque  $x \rightarrow \infty$ , on dit que la marche est fortement auto-répulsive. On voit que la loi du futur de  $X$  après l’instant  $n$  ne dépend du passé de  $X$  que par l’intermédiaire de sa densité de temps d’occupation, ici la fonction  $\Lambda_n$  qui à chaque arête  $x$  associe le nombre de fois où la marche a parcouru cette arête avant  $n$ .

Ainsi, ces marches auto-interagissantes sont des processus Markoviens si on les considère comme des processus à valeur dans l’ensemble des fonctions  $\Lambda : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ . Notons, qu’il est facile de détecter l’évolution de  $X$  en observant celle de  $\Lambda_n(\cdot)$ . En effet, l’arête que  $X$  a empruntée entre  $n$  et  $n + 1$  est la seule pour laquelle  $\Lambda_{n+1}(x) \neq \Lambda_n(x)$ .

Il est naturel de se poser les questions suivantes:

- Que peut-on dire de l’ordre de grandeur de  $X_n$  lorsque  $n$  est grand?
- Y-a-t-il un processus continu limite (après renormalisation convenable) et si oui, quel est-il?

La réponse à la première question a été apportée par Bálint Tóth, qui a montré que l’ordre de grandeur de  $X_n$  était  $n^{2/3}$ , lorsque par exemple  $f$  décroît exponentiellement. Ceci est obtenu via des généralisations des théorèmes dits de Ray-Knight (pour les marches aléatoires simples) à ces processus. La deuxième question devient donc particulièrement intéressante, car le processus limite, s’il existe, doit sortir du cadre habituel des processus à variation quadratique bornée; il devra avoir une variation d’ordre  $3/2$  bornée; la trajectoire sera de nature très différente du mouvement brownien. Rappelons rapidement ici que la variation d’ordre  $u$  d’un processus est la limite si elle existe, le long de subdivisions  $t = 0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de plus en plus fines de l’intervalle de temps (ici  $[0, 1]$ ) de

$$\sum_{j=0}^{n-1} (X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^u.$$

Signalons que cet exposant  $2/3$  apparaît dans de nombreuses conjectures (et résultats) concernant des fluctuations de fonctions aléatoires (par exemple les équations KPZ), de grandes matrices aléatoires.

C’est ce processus continu  $(X_t, t \geq 0)$  que nous avons construit avec Bálint Tóth. L’idée est d’exploiter l’intuition que l’on a sur ses courbes de temps locaux. L’idée de la construction est la suivante: En chaque point  $(x, h)$  dans le



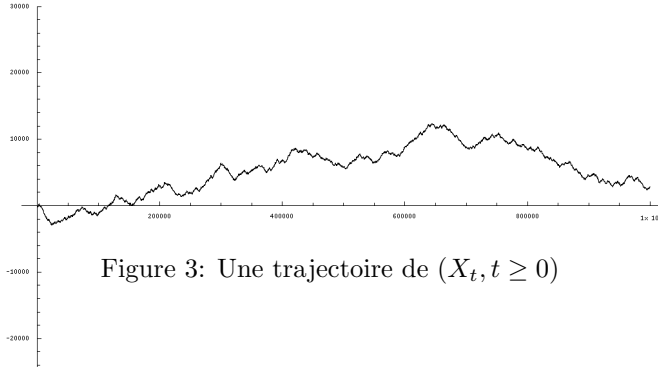


Figure 3: Une trajectoire de  $(X_t, t \geq 0)$

plan, on fait partir un mouvement brownien uni-dimensionnel  $L_{(x,h)}(y)$ ,  $y \geq x$ , de telle sorte que ces trajectoires browniennes sont indépendantes tant qu'elles restent disjointes, mais qu'elles coalescent dès qu'elles se rencontrent. C'est une famille de mouvement browniens coalescents. Le mouvement brownien uni-dimensionnel étant récurrent, deux trajectoires finissent ainsi toujours par se rencontrer. La structure planaire dessinée est en quelque sorte un arbre enraciné en  $+\infty$ . Comme on définit un processus qui part de chaque point, cet arbre est en fait "dense" dans le plan. On peut malgré tout définir de manière directe, un processus  $(X_t, H_t)$  qui fait le tour de l'arbre, en partant de  $(0, 0)$ , de sorte que l'aire balayée par  $(X, H)$  est proportionnelle au temps. Ce processus est alors une sorte de courbe de Peano aléatoire. Le processus  $X$  est simplement sa coordonnée réelle. L'enveloppe supérieure de l'ensemble des points déjà visités dans le plan à l'instant  $n$  est la courbe  $L$  issue de ce point et joue alors le rôle de  $\Lambda$  pour le processus  $X$ .

Plusieurs autres observations notables:

- Le changement d'échelle d'ordre  $3/2$  s'explique alors simplement: Le temps s'écoule comme l'aire sous une courbe brownienne alors que le déplacement en espace est le temps de cette courbe brownienne.
- Le processus  $X$  n'évolue pas du tout comme une diffusion. On peut montrer le résultat suivant, a priori un peu étonnant:

$$X_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \frac{\ell(t, X_t - \varepsilon) - \ell(t, X_t + \varepsilon)}{\varepsilon} dt$$

où cette limite est choisie en probabilités, et  $\ell = L_{(X_t, H_t)}(\cdot)$  est la courbe de temps d'occupation à l'instant  $t$ . Ainsi, on a heuristiquement

$$dX_t = -\nabla_x \ell(X_t) dt,$$

qui n'a pas de terme stochastique (alors que  $X$  est aléatoire). Cette équation peut d'ailleurs être reliée formellement à des lois de conservation hyperbolique (deux fonctions, deux inconnues).

Comme on le verra, ce processus bidimensionnel qui remplit le plan a quelques similarités avec un autre processus appelé SLE(8) qui est défini comme une courbe de Peano aléatoire sans la contrainte de monotonie des trajectoires  $\Lambda$  (qui ne vont plus forcément de gauche à droite). Il semblerait que ce processus  $(X, H)$  a d'ailleurs inspiré Oded Schramm lorsqu'il a essayé de relier ces processus SLE à ces labyrinthes aléatoires. La famille de mouvements browniens

coalescents, aux propriétés intéressantes (par exemple, il y a un flot dual allant de droite à gauche, réfléchi sur le premier) est aujourd’hui souvent appelé “filet brownien” (Brownian web).

Articles mentionnés dans ce paragraphe:

- The true self-repelling motion, en collaboration avec Bálint Tóth (Math. Inst. Budapest), *Probability Theory and Related Fields*, 111, 375-452 (1998)
- Reflection and coalescence between independent one-dimensional Brownian paths, en collaboration avec Florin Soucaliuc (Université Paris-Sud) et Bálint Tóth, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 36 509-545 (2000)

### La percolation critique dans le plan

A ce stade, et avant de poursuivre sur l’étude des exposants d’intersection browniens, il convient d’introduire un autre modèle issu de la physique statistique, à savoir la percolation critique. C’est un modèle qui s’inscrit dans une classe plus vaste de modèles sur réseau auxquels les physiciens et les mathématiciens s’intéressent depuis longtemps. Le cadre général est le suivant. On considère un réseau (en dimension deux ou trois) régulier, et on associe à chaque site  $x$  du réseau une valeur  $\sigma(x)$ , qui peut s’interpréter comme une couleur, un spin, une magnétisation etc. La fonction  $\sigma$  peut être vue comme une configuration possible du système. On veut ensuite définir une loi de probabilité sur l’ensemble des fonctions  $\sigma$  possibles, c’est à dire la loi d’une fonction aléatoire  $\sigma$ , qui correspond à un phénomène physique. Pour cela, le formalisme habituel de la physique statistique est le suivant. On associe à chaque configuration  $\sigma$  une énergie  $H(\sigma)$ . Cette fonction  $H$  étant choisie, on fixe un paramètre  $T$  (appelé température) et on définit la loi de probabilité de sorte que

$$P(\sigma) = Z^{-1} \exp\{-H(\sigma)/T\},$$

où la constante  $Z$  est une constante de normalisation choisie pour que  $P$  soit bien une loi de probabilité, i.e.  $Z = \sum_{\sigma} e^{-H(\sigma)/T}$ .

On s’intéresse en général au cas où le réseau sur lequel on définit  $\sigma$  est très grand, ou tend vers l’infini. Il y a là beaucoup de questions mathématiques, et il existe de nombreux problèmes intéressants à étudier. C’est l’une des branches importantes de la théorie des probabilités et de la physique mathématique. Souvent, on s’intéresse au cas où  $H$  est définie via des interactions à courte portée, où même de plus proche voisin. Le modèle d’Ising, introduit pour étudier le ferromagnétisme, associe par exemple à chaque configuration  $\sigma$  (où  $\sigma(x)$  ne peut prendre que deux valeurs possibles) la quantité  $H(\sigma)$  qui est le nombre de voisins en désaccord i.e. la somme sur toutes les arêtes  $(x, y)$  du graphe de  $1_{\sigma(x) \neq \sigma(y)}$ . Il se trouve que le comportement à grande échelle peut dépendre de manière importante de la variable  $T$ . Il y a alors une transition de phase qui se produit pour une certaine valeur, dite critique, de  $T$ . Le comportement des grands systèmes lorsque la température est exactement à cette température critique peut alors

s'avérer aléatoire, et ce comportement décrit aussi celui du système lorsque la température est proche de la température critique. On parle de phénomènes critiques, et de nombreux travaux de physiciens ont été consacrés à ce sujet. On peut mentionner les noms d'Onsager et Baxter, la théorie de la renormalisation (Kadanoff, Fisher, Wilson...), la théorie conforme des champs (Polyakov, Zamolodchikov, Cardy), les gaz de Coulomb, les intégrales de matrices et le rôle important joué par les physiciens français au CEA à Saclay sur ces questions.

Le but n'est pas ici de donner une introduction à ce très vaste sujet, et je vais donc me limiter au cas qui nous intéresse ici, c'est à dire celui de la percolation. C'est le modèle le plus simple possible: Disons que  $\sigma$  prend la valeur 0 ou 1 en chaque site du réseau et que tous les  $\sigma(x)$  sont choisis indépendamment, en suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ :  $P(\sigma(x) = 1) = p$  et  $P(\sigma(x) = 0) = 1 - p$ . On s'intéresse à l'existence (ou non) de long chemins constitués de sites dans l'état 1. Il se trouve que de tels chemins existent (en un certain sens) seulement lorsque  $p$  est assez grand. En particulier, si l'on travaille sur un réseau infini, il existera de tels chemins infinis seulement à partir d'une certaine valeur critique  $p_c$ .

Signalons que de nombreuses questions de base restent ouvertes du point de vue mathématique. On ne sait par exemple pas montrer que lorsque la dimension de l'espace est 3, alors il n'y a pas de tels chemins infinis lorsque  $p$  est exactement égal à la valeur critique. En dimension deux, on peut cependant dire beaucoup de choses. Les frontières des composantes connexes de sites de type 1 sont des (réunions de) courbes sans points doubles, et on peut aussi exploiter une forme de dualité entre les amas de sites dans l'état 1 et les amas de sites dans l'état 0. Le graphe triangulaire, où chaque face est un triangle équilatéral, joue un rôle particulier. Dans ce cas, un argument de symétrie permet de montrer que  $p_c = 1/2$ . Il est à noter que ce résultat très intuitif n'est pas immédiat, et qu'il n'a été prouvé par Kesten qu'au début des années 1980. Dans la suite, nous allons nous focaliser sur ce cas.

Comme pour la plupart des systèmes critiques plans avec interactions de plus proche voisin, les physiciens avaient conjecturé que la percolation critique dans le plan était "invariante conforme" à grande échelle, et que les techniques basées sur la théorie conforme des champs devaient permettre de déterminer ses exposants critiques. La notion conjecturée d'invariance conforme a été progressivement affinée, par Aizenman, et aussi dans un article de Langlands, Pouliot et Saint-Aubin, où elle est décrite en terme de probabilité de connexions entre domaines, suite aux prédictions dues au physicien John Cardy.

Oded Schramm a alors inventé une manière constructive de définir des courbes aléatoires planes invariantes conformes qui sont les seules limites possibles d'interfaces de modèles de mécanique statistique avec interaction locale, en combinant des idées d'analyse stochastique avec les définitions de courbes bidimensionnelles introduites par Charles Loewner dans les années 1920 dans un autre contexte (celui de l'analyse complexe classique). L'idée de base est simple. On cherche à comprendre le comportement limite des interfaces entre amas noirs et amas blancs. Ces interfaces peuvent être explorées de manière dynamique et locale. A chaque pas, l'interface essaie de découvrir un hexagone. S'il est noir, l'interface

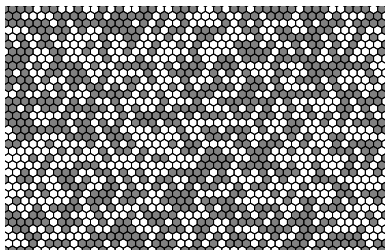


Figure 4: Percolation critique dans un rectangle

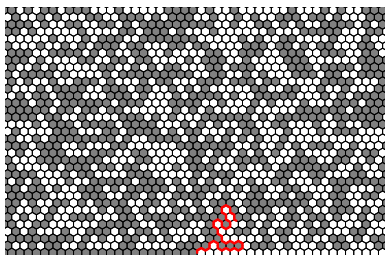


Figure 5: Une portion d'interface en percolation critique

le contourne par la droite et s'il est blanc, elle le contourne par la gauche. La trajectoire interagit cependant souvent avec son passé. Souvent l'interface redécouvre un hexagone dont elle connaît en fait déjà la couleur qu'elle a déjà découverte auparavant. L'interface de la percolation critique peut donc être considérée comme une marche aléatoire en dimension 2, qui interagit localement avec son passé via la condition d'auto-évitement.

Loewner a montré qu'une courbe continue  $\gamma$  sans point double dans le demi-plan supérieur  $\mathbf{H}$  avec  $\gamma(0) = 0$  pouvait être codée via une fonction réelle  $w(t)$  de sorte que l'image par l'application conforme  $g_t$  de  $\mathbf{H} \setminus \gamma[0, t]$  dans  $\mathbf{H}$  telle que  $g_t(z) = z + o(1)$  lorsque  $z \rightarrow \infty$  vérifie  $g_t(\gamma_t) = w(t)$  (pour cela il faut aussi avoir paramétré  $\gamma$  de sorte que le terme suivant dans le développement limité de  $g_t$  est  $2t/z$ ). L'invariance conforme et le fait qu'une interface peut être explorée localement dit que  $t \mapsto w(t)$  doit être continue, à accroissements indépendants et sans biais. Ainsi,  $w$  doit être le multiple d'un mouvement brownien. Pour des raisons historiques, on note cette constante  $\sqrt{\kappa}$ . Ainsi, chaque choix de  $\kappa$  définit une courbe aléatoire. C'est le SLE (Schramm-Loewner Evolution) de paramètre  $\kappa$ . Oded Schramm a en outre observé que pour  $\kappa = 6$ , on obtient formellement la formule conjecturée par Cardy pour les probabilités de croisement de la percolation critique.

En fait, il est possible d'évaluer également pour cette courbe aléatoire particulière des probabilités asymptotiques d'événements, qui s'interprètent en termes d'exposants critiques (ce sont des calculs effectués avec Oded Schramm et

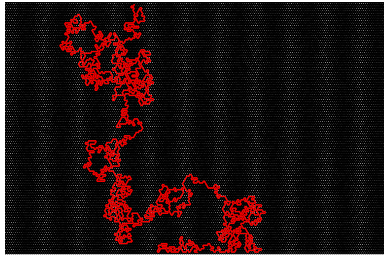


Figure 6: Une portion plus longue d'interface en percolation critique

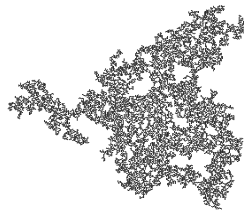


Figure 7: Un amas de percolation

Greg Lawler) de percolation critique. En combinant ceux-ci avec les travaux antérieurs de Kesten, et avec la preuve apparue en 2001 par Stas Smirnov de la percolation critique sur le réseau triangulaire, il a été possible de démontrer les conjectures des physiciens sur ce modèle, à savoir par exemple:

- Le nombre de points sur une interface de diamètre  $N$  sera de l'ordre de  $N^{7/4}$
- La probabilité (pour  $p = 1/2$ ) que l'origine se trouve dans un amas de diamètre supérieur à  $R$  décroît comme  $R^{-5/48+o(1)}$  lorsque  $R \rightarrow \infty$ .
- La probabilité pour que l'origine soit dans la composante connexe infinie décroît comme  $(p - 1/2)^{5/36+o(1)}$  lorsque  $p \rightarrow 1/2+$ .

Articles mentionnés dans ce paragraphe:

- Values of Brownian intersection exponents I: Half-plane exponents, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm (Weizmann Institute & Microsoft Research), math.PR/9911084, Acta Mathematica, 187, 237-273 (2001).
- Values of Brownian intersection exponents II: Plane exponents, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, math.PR/0003156, Acta Mathematica, 187, 275-308 (2001)
- One-arm exponent for critical 2D percolation, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, Electronic Journal of Probability 7, paper no.2 (2002)
- Critical exponents for two-dimensional percolation, en collaboration avec Stas Smirnov, math.PR/0109120, Math. Res. Lett. 8, 729-744 (2001).

### La détermination des exposants browniens

Dans un travail avec Greg Lawler en 1999, dans le prolongement de celui sur les relations fonctionnelles sur les exposants browniens dans lequel nous avons remplacé des paquets de mouvements browniens par d'autres paquets de mouvements browniens, nous nous étions auparavant demandé s'il existait d'autres objets invariants conformes par lesquels il serait possible de remplacer les paquets de mouvements browniens. Pour cela, il nous fallait identifier quelle était la propriété importante qui caractérisait ces paquets de mouvements browniens, en plus de l'invariance conforme. C'est la propriété que nous avons appelé "localité", que ces amas ont hérité de la propriété de Markov des trajectoires browniennes. En gros, la trajectoire d'un mouvement brownien ne découvre la géométrie de l'espace dans lequel il se déplace uniquement à l'endroit où il passe. Il n'y a pas d'"effet à distance". Cette observation nous a alors amené à chercher d'autres objets partageant cette propriété. En effet, s'ils existent, les exposants associés doivent être les mêmes que les exposants brownien. En fait, si leur frontière était plus facile à étudier que celle d'un mouvement brownien, cela permettrait de déterminer leurs exposants et d'en déduire la valeur des exposants browniens.

Il se trouve que la percolation critique, ou plutôt sa limite conjecturale, possède les deux propriétés requises. Il était conjecturé qu'elle était invariante conforme, et la propriété de localité découlait directement du fait que l'état des différents sites en percolation sont indépendants. Ainsi, si la limite à grande échelle des interfaces de percolation existe et est invariante conforme, elle doit avoir les mêmes exposants critiques que le mouvement brownien plan. A ce moment-là, l'invariance conforme de la percolation critique n'était pas démontrée (la preuve de Smirnov est arrivée peu après), mais le SLE existait. C'était un objet bien défini mathématiquement, invariant conforme par construction, et on pouvait étudier ses propriétés. Avec Lawler et Schramm, nous avons ainsi calculé ses exposants critiques et montré que l'un de ces processus (le SLE de paramètre 6) vérifiait bien la propriété de localité. Ceci suffisait donc

pour établir rigoureusement les conjectures de Duplantier-Kwon, ainsi que celle de Mandelbrot. Ainsi:

- La probabilité pour que les trajectoires de  $k$  mouvement browniens (ou de  $k$  marches aléatoires) issues de  $k$  points disjoints donnés restent disjointes sur un grand intervalle de temps  $[0, t]$  décroît comme  $t^{-\xi_k + o(1)}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , avec  $\xi_k = (4k^2 - 1)/24$ .
- La dimension de Hausdorff de la frontière extérieure d'une trajectoire brownienne vaut  $4/3$  avec probabilité 1.

Articles mentionnés dans ce paragraphe:

- Values of Brownian intersection exponents I: Half-plane exponents, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, *Acta Mathematica*, 187, 237-273 (2001).
- Values of Brownian intersection exponents II: Plane exponents, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, *math.PR/0003156*, *Acta Mathematica*, 187, 275-308 (2001)
- Values of Brownian intersection exponents III: Two-sided exponents, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, *math.PR/0005294*, *Annales Inst. Henri Poincaré PR 38*, 109-123 (2002)
- Analyticity of intersection exponents for planar Brownian motion, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, *math.PR/0005295*, *Acta Mathematica*, vol. 189, 179-201 (2002)
- The dimension of the planar Brownian frontier is  $4/3$ , en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, *math.PR/0010165*, *Math. Res. Lett.* 8, 401-411 (2001)
- Sharp estimates for Brownian non-intersection probabilities, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, *math.PR/0101247*, In: In and out of equilibrium. Probability with a physics flavor, V. Sidoravicius Ed., *Progress in Probability 51*, Birkhuser, 113-131 (2002)

### Les chemins auto-évitants et l'universalité

Il existe cependant de nombreuses conjectures non-résolues sur ces modèles plans. Le problème principal est maintenant de comprendre en partant d'un modèle critique discret, sur un réseau par exemple, pourquoi il est (asymptotiquement) invariant conforme à grande échelle. L'un des modèles étudiés depuis très longtemps est "la marche auto-évitante". Contrairement à ce que suggère son nom, il n'est pas très naturel de voir ce modèle comme une "marche" qui évolue au cours du temps. La question posée est plutôt la suivante. On fixe un réseau, un point de départ  $O$ , et un nombre de pas  $N$  très grand. On choisit ensuite uniformément parmi toutes les possibilités un chemin de longueur  $N$  issu

de  $O$  et qui ne repasse pas deux fois par le même point (elle est auto-évitante). On cherche alors à comprendre le comportement de cette mesure à valeur dans les chemins auto-évitants lorsque  $N$  est grand. Il était conjecturé, sur des bases spéculatives par Flory il y a longtemps, puis sur des bases expérimentales, puis avec des arguments de la physique théorique (par B. Nienhuis) au début des années 80, qu’une longue courbe auto-évitante avait une “dimension fractale”  $4/3$  et qu’en  $N$  pas, elle se déplaçait environ d’une distance  $N^{3/4}$ .

Une question presque équivalente concerne le comportement de longs lacets auto-évitants, choisis “uniformément”, dont le comportement doit être le même. Nous avons pu montrer avec Greg Lawler et Oded Schramm que si la limite d’échelle des longs chemins auto-évitants existe et est invariante conforme, alors il est possible d’identifier cette limite en terme de processus SLE de paramètre  $\kappa = 8/3$ . En effet, ce processus est le seul à posséder une propriété que nous avons appelée “de restriction conforme”, dont l’analogie discret est vérifié par la marche auto-évitante. Nous allons décrire cette propriété dans le cas des lacets, ce qui nous permettra aussi de faire le lien avec la percolation et le mouvement brownien.

Supposons que  $\mu$  soit une mesure dans l’espace des lacets auto-évitants dans le plan complexe, définis modulo reparamétrisation croissante. Alors, on dit que  $\mu$  vérifie la propriété de restriction conforme lorsque pour tout domaine simplement connexe  $D$  et toute application conforme  $\Phi$  de  $D$  dans  $\Phi(D)$ , l’image par  $\Phi$  de la mesure  $\mu$  restreinte aux lacets qui restent dans  $D$ , est identique à la mesure  $\mu$  restreinte aux lacets qui restent dans  $\Phi(D)$ .

On peut alors montrer qu’il existe une telle mesure  $\mu$  qui vérifie cette propriété et que l’on peut décrire en termes de “lacets de SLE(8/3)”. En outre, la mesure  $\mu$  et ses multiples  $c\mu$  sont les seules mesures à valeur dans les lacets auto-évitants qui vérifient cette propriété. Ainsi, la mesure  $\mu$  est en un certain sens la seule limite invariante conforme possible pour les grands lacets auto-évitants.

En outre, il est possible de montrer directement que des mesures sur les lacets browniens et les lacets de SLE(6) (qui sont les limites des bords d’amas de percolation) vérifient aussi la propriété de restriction conforme. Ce ne sont pas des lacets auto-évitants, mais leurs bords extérieurs le sont. Ainsi, on arrive à la conclusion suivante: Les trois mesures suivantes sont identiques (à une constante multiplicative près):

- Une mesure sur les bords extérieurs de lacets browniens
- Une mesure sur les bords extérieurs de lacets de SLE(6) qui est en fait la limite de la mesure sur les bords extérieurs de grands amas de percolation
- Une mesure sur les lacets de SLE(8/3), qui est la limite conjecturée de la mesure sur les longs lacets auto-évitants.

Le même objet aléatoire apparaît ainsi dans trois contextes très différents. On parle d’“universalité”.

Signalons qu’un lacet peut être interprété comme un recollement/soudure (“welding” en anglais) de deux disques. Cette approche rapproche ces travaux



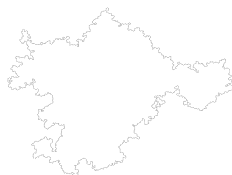


Figure 8: Un lacet auto-évitant continu

sur la mesure  $\mu$  de questions soulevées en analyse complexe, en théorie de représentations (algèbres de Lie de dimension infinie) ou en analyse stochastique (mesures unitarisantes).

Articles mentionnés dans ce paragraphe:

- On the scaling limit of planar self-avoiding walk, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, math.PR/0204277, in Fractal geometry and application, A jubilee of Benoit Mandelbrot, Part 2, 339–364, Proc. Sympos. Pure Math., 72, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- Conformal restriction. The chordal case, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, math.PR/0209343, J. Amer. Math. Soc. 16, 917-955 (2003).
- The conformally invariant measure on self-avoiding loops, J. Amer. Math. Soc. 21, 137-169 (2008).

### **Le marche à boucles effacées et les labyrinthes aléatoires**

La question des marches aléatoires auto-évitantes en dimension 2 est très vite apparue comme étant particulièrement difficile. On peut alors essayer d'étudier d'autres manières naturelles de choisir au hasard des chemins auto-évitants. Il s'est avéré que les marches aléatoires à boucles effacées possédaient des propriétés intéressantes. Rappelons brièvement leur définition. On considère une marche aléatoire ordinaire  $X$  sur un certain intervalle de temps  $[0, N]$

que l'on parcourt chronologiquement. On dessine alors dessus un chemin auto-évitant reliant  $X(0)$  à  $X(N)$  en effaçant les boucles effectuées par  $X$  de manière chronologique. Ainsi, le chemin à boucles effacées est défini par récurrence par  $Y(j+1) = X(s_j+1)$  où  $s_j = \max\{i \leq N : X_i = Y_j\}$ .

Plusieurs observations suggèrent que ce modèle possède des propriétés intéressantes.

Tout d'abord, lorsque  $N$  est le temps d'atteinte d'un point  $y$  par la marche, alors la marche à boucles effacées a exactement la loi de la branche reliant  $x = X(0)$  à  $y$  lorsque l'on choisit uniformément parmi toutes les possibilités, un arbre couvrant le graphe sous-jacent. Ce modèle d'arbres couvrant fait par ailleurs partie de la classe des modèles de percolation FK, pour lesquels les physiciens ont aussi conjecturé l'invariance conforme asymptotique et des valeurs d'exposants critiques. Si on parcourt le "bord" d'un arbre couvrant, on obtient une courbe simple sans point double remplissant un graphe bi-dimensionnel, de sorte que choisir un arbre couvrant uniformément revient en quelque sorte à choisir une courbe de Peano uniformément. Ce lien avec les arbres uniformes est l'une des manières d'expliquer les nombreuses propriétés remarquables de la loi de la marche à boucles effacées.

Ensuite, la marche aléatoire convergeant vers le mouvement brownien, qui est invariant conforme, on peut penser qu'il en sera de même pour la marche aléatoire à boucles effacées qui devrait converger vers une sorte de mouvement brownien à boucles effacées. Mais il ne semble pas possible de définir directement un tel objet, en raison de l'infinité de petites boucles effectuées par le mouvement brownien (il n'y a pas de "première boucle" à effacer).

En fait, c'est pour comprendre ce modèle qu'Oded Schramm avait initialement introduit le processus SLE. Il avait alors montré que si la marche aléatoire à boucles effacées avait une limite d'échelle, alors ce devait être le SLE de paramètre 2. Dans un article en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, nous avons montré que c'était effectivement le cas. De manière parallèle, la courbe de Peano uniforme converge vers le SLE de paramètre 8, une courbe continue remplissant le domaine considéré. Ceci complète les résultats de Richard Kenyon concernant les exposants critiques de la marche à boucles effacées en exploitant le lien entre arbres uniformes, pavages aléatoires et l'analyse complexe discrète.

Article mentionné dans ce paragraphe:

- Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm, *Ann. Prob.* 32, 939-995 (2004).

### La soupe brownienne

Il existe une manière totalement différente de construire des processus de type SLE, uniquement à partir de mouvements browniens. Cette définition peut paraître surprenante à première vue. Pour cela, il faut tout d'abord définir une mesure infinie sur les lacets browniens dans un domaine donné  $D \subset \mathbf{C}$ . Cette définition est en fait très naturelle. Il s'agit de la limite d'échelle de la mesure

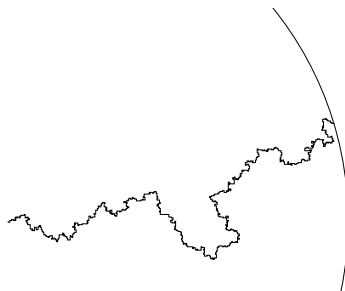


Figure 9: Le processus SLE(2)

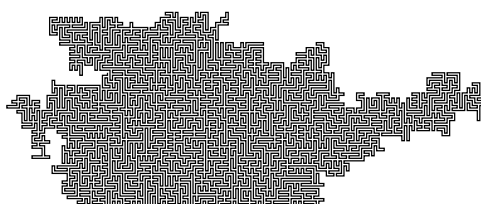


Figure 10: Un bout de courbe de Peano uniforme

qui à chaque cycle  $\ell$  (de longueur  $n = n(\ell)$  tracé sur le réseau  $\mathbf{Z}^2$  associe une masse  $4^{-n}$ . En se restreignant à ceux qui restent dans  $D$ , on définit ainsi une mesure infinie  $\mu_D$  sur l'ensemble des lacets dans  $D$ . Il s'avère que cette mesure est invariante conforme. L'image par une application conforme  $\Phi : D \rightarrow \Phi(D)$  de  $\mu_D$  est exactement  $\mu_{\Phi(D)}$ .

Maintenant, on choisit un paramètre  $c > 0$ , et on définit un processus de Poisson ponctuel d'intensité  $c\mu_D$ . C'est un ensemble dénombrable aléatoire de lacets browniens  $(\gamma_j, j \in J)$  dans  $D$ . Lorsque  $c$  n'est pas trop grand, l'ensemble  $\cup_j \gamma_j$  a plusieurs composantes connexes. Les frontières extérieures de ces composantes connexes sont des courbes aléatoires, fractales, de plus en plus tortueuses à mesure que  $c$  croît. Il s'avère que pour une normalisation bien choisie, ces courbes sont des (lacets de) SLE de paramètre  $\kappa = \kappa(c)$  pour tout  $c \leq 1$ . Cette intensité  $c$  s'interprète alors en termes de charge centrale pour la théorie conforme des champs. Ainsi, les SLE pour tous  $\kappa \leq 4$  sont-ils des bords d'amas de lacets browniens, et il est possible de les construire uniquement à partir de trajectoires browniennes.

Articles mentionnés dans ce paragraphe:

- The Brownian loop-soup, en collaboration avec Greg Lawler, Probab. Th. Rel. Fields 128, 565-588 (2004).
- SLEs as boundaries of clusters of Brownian loops, math.PR/0308164, C. R. Ac. Sci. Paris Ser. I Math. 337, 481-486 (2003).

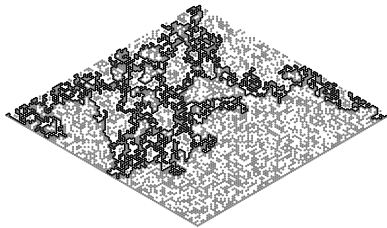


Figure 11: Percolation et interface critique

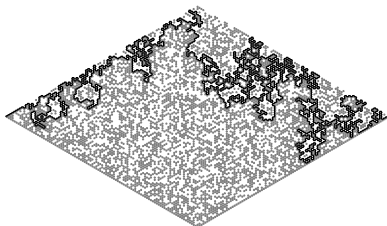


Figure 12: Percolation et interface presque critique

### Les courbes “presque critiques”

Comme nous l’avons vu, les processus SLE sont les courbes aléatoires qui apparaissent (de manière conjecturale et parfois prouvée) à la limite lorsque l’on fait tendre la maille du réseau (pour un système bi-dimensionnel critique) vers 0. Alternativement, on fixe le paramètre  $p = p_c$ , et on fait tendre la taille du système  $N$  vers l’infini. En pratique, il est cependant rare d’observer ce type de limite. Dans beaucoup d’exemples, la taille du système est effectivement très grande, mais le paramètre  $p$  est proche de  $p_c$  sans être pour autant exactement égal à  $p_c$ . Les relations dites “de scaling” développées par des physiciens théoriciens (Fisher, Kadanoff, Wilson entre autres) et établies rigoureusement par Harry Kesten dans le cas de la percolation montrent que les exposants critiques décrivant ces courbes “presque critiques” sont les mêmes que celles des courbes “exactement critiques” de sorte que l’étude des processus SLE est pertinente pour déterminer ces exposants. Avec Pierre Nolin, nous avons montré que, de manière peut-être surprenante, les courbes “presque critiques” sont (à la limite) intrinsèquement différentes des processus SLE. De manière plus précise, on montre que le support des lois des courbes presque critiques (qui sont celles souvent observées dans la pratique) dans le cas de la percolation est disjoint de celui des lois du processus SLE(6) qui est la limite du modèle critique: En observant une petite portion de l’interface, on peut détecter s’il s’agit d’une interface exactement critique ou non.

Voici quelques éléments pour comprendre ce régime “presque critique” dans le cas de la percolation. Supposons que l’on considère une percolation de

paramètre  $p = p(N)$  dans un domaine de taille  $N \times N$ . On étudie une interface entre deux parties du bord comme précédemment. Lorsque  $p(N) = 1/2$  et  $N$  est très grand, la courbe est proche d'un SLE(6). Lorsque  $p(N) - 1/2$  est très petit, alors on observe encore (exactement) un SLE(6) à la limite. Lorsque  $p(N) - 1/2$  n'est pas assez petit, il n'y a pas d'interface macroscopique non-triviale (comme dans le cas où  $p \neq 1/2$  est fixé). Lorsque  $p(N) - 1/2$  est "intermédiaire" de sorte que l'on n'est dans aucun de ces deux cas, on a une interface "presque critique".

On peut rapprocher cela du cas d'une marche aléatoire sur  $\mathbf{Z}$  à  $N$  pas et de paramètre  $p(N)$ . Lorsque  $p(N) - 1/2 \ll 1/\sqrt{N}$ , la limite (renormalisée) est encore exactement le mouvement brownien, lorsque  $p(N) - 1/2 \gg 1/\sqrt{N}$  alors la limite (renormalisée) est une droite, et lorsque  $p(N) = 1/2 + c/2\sqrt{N}$ , la limite est un mouvement brownien avec dérive  $c$ . Cependant, contrairement au cas du SLE, la loi du mouvement brownien avec dérive a même support que la loi du mouvement brownien. La dimension supérieure permet donc des phénomènes nouveaux.

Article mentionné dans ce paragraphe:

- Asymmetry of near-critical percolation interfaces, en collaboration avec Pierre Nolin, J. Amer. Math. Soc., à paraître.

### Notes de cours

J'ai donné un certain nombre de cours avancés (par exemple à des écoles d'été), de niveau troisième cycle pour doctorants, post-doctorants ou chercheurs, à Saint-Flour, Edinburgh, Les Houches (2005), Park City, Orsay, Rio, Les Houches (2008). J'ai ainsi été amené à rédiger plusieurs notes de cours:

- Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions, Lecture notes from the 2002 Saint-Flour summer school, Springer, L.N. Math. 1840, 107-195, 2004.
- Conformal restriction and related questions, Probability Surveys 2, 145-190 (2005)
- Some recent aspects of random conformally invariant systems, in: Les Houches Summer School LXIII 2005, *Mathematical Statistical Physics*, Elsevier, 2006.
- Lectures on two-dimensional critical percolation, IAS-Park City 2007 summer school, AMS, à paraître.
- Percolation et modèle d'Ising, Cours spécialisés de la SMF, à paraître.