Travaux de Recherche

Introduction. Les questions qui me préoccupent ont leur origine historique dans la mécanique quantique, mais pour moi, leur origine est tracée dans des rencontres, des influences diverses. Des sentiments ont animé mes recherches. Sans nul doute, je trouve un grand plaisir toujours intact et frais dans le travail de recherche : une fierté un peu enfantine de mon "importance personnelle", la satisfaction de voir enfin clairement la solution d'un problème qui se retrouve facile à saisir après de longs zigzags inutiles. Il y a de la souffrance, toujours renouvelée elle aussi : se sentir minable devant l'infini savoir-faire des "autres", défaite devant le peu atteint. La persistance de ces deux sentiments contradictoires me pousse à travailler.

Voici les principaux thèmes de mes recherches.

Un groupe de Lie réel G opère sur une variété M, lisse ou quelquefois algébrique. On suppose que le groupe de Lie G conserve certains objets liés à M. Par exemple, si M est une variété symplectique, le groupe G est un groupe de transformations symplectiques de M. Si M est algébrique, le groupe G est un groupe de transformations algébriques de M. Si M est une variété et P un opérateur différentiel sur M, l'action de G sur les fonctions sur M commute avec celle de P. Peut-on alors quantifier l'action de G sur M, c'est-à-dire peut-on associer à M et à ces données additionnelles un espace de Hilbert $Q(M)$ sur lequel le groupe G agit et qui reflète certaines propriétés de l'action de G sur M ? L'espace $Q(M)$ dépend-il des données additionnelles ou bien est-il canonique ? Peut-on relier certaines propriétés de l'espace des orbites M/G à celles de M ?

À ces questions sont reliés des problèmes de combinatoire, de théorie des nombres, d'indice d'opérateurs et de cohomologie équivariante. J'ai aussi parfois effleuré des sujets sans actions de groupes, mais avec la pensée qu'un groupe invisible existait. Par exemple, considérons le problème élémentaire de compter le nombre de points entiers dans un polytope convexe P de dimension n. Il existe alors une variété algébrique M de dimension $2n$ munie d'une action d'un tore G de dimension n dont P soit l'espace des orbites. La formule pour la dimension de la représentation quantifiée $Q(M)$ fournit alors une réponse explicite pour le nombre de points entiers dans $P = M/G$. C'est l'idée

Date: Juin 2001.

qui inspire mon travail sur le nombre de solutions en entiers positifs des systèmes d'équations linéaires à coefficients entiers positifs.

Pour la clarté de l'exposé, je regrouperai les thèmes de mon travail sous les rubriques suivantes.

1) Variété des algèbres de Lie nilpotentes.

2) La méthode des orbites pour un groupe de Lie général G et la formule de Poisson-Plancherel.

3) Représentations à énergie positive de groupes de Lie semi-simples réels et représentation métaplectique.

4) Cohomologie équivariante.

5) Indice des opérateurs et Formule Universelle.

6) Quantification géométrique et polyèdres convexes.

Beaucoup de ces thèmes interfèrent entre eux et ce regroupement est un peu arbitraire. Toutefois l'ordre correspond à l'ordre chronologique du début de mes recherches sur ces sujets, mais il m'arrive de revenir beaucoup plus tard sur des questions laissées en suspens.

Cette description de mon travail est, le genre oblige, centrée sur moi-même . On n'y percevra qu'un écho très affaibli des travaux des autres mathématiciens qui m'ont inspiré.

Je signalerais aussi par quelques mots insuffisants les sujets auxquels se sont intéressés mes étudiants qui ont continué de faire de la recherche en mathématique. Leurs accomplissements en mathématiques ou dans d'autres domaines me procurent toujours un plaisir sans mélange.

Variété des algèbres de Lie nilpotentes. En 1965, Claude Chevalley me proposa un sujet pour une thèse de troisième cycle. Il s'agissait de classer les algèbres de Lie nilpotentes. Chevalley m'avait donné des jolis petits cahiers bleus, avec des formules encadrées et des ratures très propres, portant en titre : algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 6. A moi les dimensions $7, 8, \ldots$. Mais la conclusion à laquelle j'aboutis est décevante. La variété des algèbres de Lie nilpotentes de dimension supérieure ou égale à 7 est d'une structure très obscure. Elle possède par exemple des composantes irréductibles de dimensions très différentes. Cependant j'étais fière de ce premier travail. Ces journées passées à écrire pour la première fois un texte personnel et qui fut publié ([1] et [3]) (dont l'inimportance m'était peu apparente) m'avaient procuré un grand plaisir. C'est ce même plaisir de produire quelque chose de personnel que je retrouve identique à travers les années : travailler dans mon bureau lorsque tout est calme, taper sur le clavier de mon ordinateur, agrafer les minces liasses de feuilles couvertes de calculs précieux sortant de l'imprimante, mes documents en ordre autour de moi, la corbeille à papiers vite débordante.

La Méthode des orbites pour un groupe de Lie général G et la formule de Poisson-Plancherel. Au cours de mon séjour au centre de physique théorique de l'École Polytechnique (1967-1969) et plus principalement grâce à mes discussions avec Monique Lévy-Nahas, j'ai abordé l'étude de ce qui allait rester le thème central de mon travail, les représentations des groupes de Lie et la quantification géométrique.

Soit G un groupe. On cherche à représenter G : on pense à G comme à un ensemble muni d'une structure de groupe abstrait et on cherche des matrices $T(g)$ associées à tout élément g de G vérifiant les relations $T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2)$ (les fameuses matrices de Pauli sont une représentation du groupe des quaternions).

Un problème essentiel de la théorie des représentations d'un groupe de Lie réel G est de déterminer l'espace dual de G, c'est-à-dire l'espace $\hat{G}$ des classes d'isomorphismes de représentations unitaires irréductibles de G. On sait qu'Élie Cartan détermina toutes les représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie compacts et qu'Hermann Weyl donna leur célèbre formule de caractères. La liste des représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg est due à Stone et Von Neumann. C'est la base de la mécanique quantique. Après avoir déterminé assez de représentations unitaires irréductibles de G, peut-on reconstruire une fonction sur G à partir de ses coefficients de Fourier ? C'est l'objet de l'analyse harmonique sur le groupe G et de la formule de Plancherel. Le travail formidable d'Harish-Chandra décrit la formule de Plancherel d'un groupe de Lie semi-simple réel G.

Dans les années 60, A. A. Kirillov avait proposé la séduisante méthode des orbites, valable en principe pour tout groupe de Lie réel G.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. Kirillov avait montré qu'une orbite M de G dans $\mathfrak{g}^*$ était munie d'une structure symplectique. Il avait mis en évidence, particulièrement par son travail sur le dual d'un groupe de Lie nilpotent, une relation étroite entre l'espace $\hat{G}$ et l'espace $\mathfrak{g}^*/G$ des orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$. Naturellement, comme le prescrit la physique, toutes les orbites ne sont pas "quantifiables" et ne donnent pas toutes lieu à une représentation de G, car seuls certains niveaux d'énergie peuvent apparaître : selon B. Kostant et J. M. Souriau, les variétés symplectiques quantifiables sont essentiellement celles dont la forme symplectique est entière. Autrement dit, la forme symplectique multipliée par i est alors la forme de courbure d'un fibré en lignes $\mathcal{L}$ sur M, que nous appellerons fibré de Kostant-Souriau. Ainsi à une orbite quantifiable M devrait correspondre une représentation unitaire irréductible $Q(M)$ de G. La construction de cette représentation quantifiée $Q(M)$ n'est en général pas claire. Je passerai sous silence les difficultés liées à la non-existence de structures spinorielles, je supposerai implicitement que toutes les variétés rencontrées sont spinorielles et je renvoie à [44] qui indique comment remédier à cette difficulté. Il y a d'autres difficultés majeures. L'espace des sections du fibré de Kostant-Souriau est loin d'être irréductible et de toutes façons peu ressemblant au modèle quantique en vue. Il faut le "polariser". Choisir une polarisation réelle d'une orbite revient à privilégier dans le système de coordonnées symplectiques de l'orbite M un choix des p et des q. S'il existe une polarisation réelle G-invariante, la représentation associée $Q(M)$ sera réalisée dans les fonctions $\phi(p)$ constantes sur les sous variétés lagrangiennes paramétrées par les variables q_j de M. L'action de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ a alors des chances de contenir les opérateurs $P_j = p_j, Q_k = \partial/\partial p_k$ qui vérifient les relations de commutation canoniques quantifiant les relations de Poisson $\{p_j, q_k\} = \delta_j^k$. Trouver une polarisation totalement complexe et positive revient à dire que la structure symplectique de l'orbite est celle déduite d'une structure kählerienne et que le fibré de Kostant-Souriau $\mathcal{L}$ est positif. Dans ce cas, l'espace $Q(M)$ sera l'espace des sections holomorphes du fibré de Kostant-Souriau. Les difficultés majeures pour la construction de $Q(M)$ sont donc la non-existence de polarisations G-invariantes et la non-existence de produits scalaires G-invariants lorsque M est une orbite quantifiable quelconque.

Quoiqu'il en soit, Kirillov avait conjecturé en 1967 une formule des caractères dite "formule universelle" décrivant le caractère de la représentation $Q(M)$ présumée construite. Je reviendrai sur cette formule à plusieurs reprises au cours de mon travail. Décrivons cette formule telle que l'avait présentée Kirillov. À une représentation de G dans un espace de Hilbert H est associée, lorsqu'elle est traçable, le caractère $g \mapsto \mathrm{tr}\,_H T(g)$ de cette représentation. Ce caractère est une distribution sur G. Le caractère d'une représentation est un objet fondamental puisqu'il ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la représentation T et non de la façon dont on a réalisé cette représentation. Soit M une orbite de la représentation coadjointe et β_M sa mesure de Liouville. Kirillov avait conjecturé que, si G est un groupe de Lie quelconque, "presque toute" représentation T de G était associée à une orbite coadjointe quantifiable M de G dans $\mathfrak{g}^*$ et qu'on avait la formule :

$$\mathrm{tr}\, T(\exp X) = \int_M e^{i(f,X)} j(X)^{-1/2} d\beta_M(f). \tag{1}$$

Ici $j(X)$ est la fonction sur $\mathfrak{g}$ donnée par

$$j(X) = \det \frac{\mathrm{sh}\,(\mathrm{ad}\,(X)/2)}{\mathrm{ad}\, X/2} \tag{2}$$

et la formule (1) est une identité de distributions dans un voisinage convenable de 0 dans $\mathfrak{g}$. On dira de la formule (1) que c'est la formule universelle des caractères. La mystérieuse fonction $j(X)^{-1/2}$ apparaissant dans cette formule reviendra comme un leitmotiv dans mes travaux.

Près de trente ans plus tard, une description complète (et naturelle) de $\hat{G}$ est un problème toujours ouvert (notamment le dual du groupe

$Sp(n, \mathbb{R})$ n'est pas connu sauf en petites dimensions) et la formule universelle a du être considérablement modifiée pour fournir des formules de caractères des représentations de G qui ne sont pas "génériques". De plus ces modifications ne sont pas suffisantes pour comprendre par exemple le cas des représentations unipotentes.

Vers 1967, les idées de Kirillov étaient nouvelles et on en espéra beaucoup. Elles unifiaient les travaux de E. Cartan et de H. Weyl sur les groupes compacts, de Stone-Von Neumann pour le groupe de Heisenberg et de J. Dixmier sur les groupes de Lie nilpotents. L. Auslander et B. Kostant ont vite montré que cette méthode était aussi très fructueuse dans l'étude des représentations des groupes de Lie résolubles. Mais il fallut beaucoup de travail, accompli en particulier par W. Rossmann, M. Duflo et moi-même, pour montrer par exemple que la théorie d'Harish-Chandra de la mesure de Plancherel d'un groupe de Lie réel semi-simple G rentrait naturellement dans le cadre de la théorie des orbites. Les travaux d' Abderazzak Bouaziz et de Pascale Harinck, vers 1995, ont considérablement élargi les applications de la méthode des orbites au cadre semi-simple et permettent de donner des formules remarquables d'inversion des intégrales orbitales.

Mon travail des années 69-72 ([2], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [11], [12]) s'intégrait dans un projet suscité par Jacques Dixmier autour de la méthode des orbites. J'étendis certains résultats dus à Kirillov, Dixmier et Pukanszky sur les représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent ou résoluble, sur les idéaux primitifs induits et sur la structure de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$: construction "automatique" de polarisations dites de Vergne, décomposition de représentations induites par une polarisation, choix de fonctions sur une orbite satisfaisant les relations d'anticommutation canoniques pour la structure d'algèbre de Poisson, etc.. Mes progrès s'ajoutaient à ceux de Nicole Berline, Pierre Bernat, Jacques Dixmier, Michel Duflo, Mustapha Raïs, Rudolf Rentschler, ... Une grande partie de ces résultats "collectifs", pour lesquels ma contribution était modeste, furent rédigés dans le livre [L.1] qui donne l'état de la théorie des représentations des groupes de Lie résolubles en 1972. Ces thèmes de recherche sont poursuivis par certains de mes étudiants (Gérard Lion : opérateurs d'entrelacement entre représentations induites, analyse harmonique sur des groupes de Lie nilpotents, Bernard Magneron : représentations induites holomorphes) et aussi par Duflo et ses étudiants.

Je m'intéressai ensuite (années 72-76) aux domaines bornés D de $\mathbb{C}^n$ homogènes sous l'action d'un groupe résoluble G de transformations holomorphes. Ces domaines sont appelés domaines de Siegel. Cet intérêt surgit à l'occasion de discussions avec Roger Godement sur les séries discrètes holomorphes des groupes de Lie semi-simples.

La structure symplectique de D sous-jacente à la forme kählerienne de D est celle d'une orbite coadjointe de G. Au lieu de choisir une polarisation réelle de D pour réaliser la représentation associée $Q(D)$, il est plus naturel de considérer l'espace $Q(D)$ comme étant construit à partir d'une polarisation totalement complexe, c'est-à-dire de considérer certains espaces de Hilbert de fonctions holomorphes sur D . Nous entreprîmes, Hugo Rossi et moi, l'étude des fonctions holomorphes de carré sommable pour certaines mesures semi-invariantes sur ces domaines ainsi que l'étude des espaces de Hardy partiels correspondant aux différentes orbites de G dans le bord de Shilov de D. En particulier, nous avons déterminé les mesures semi-invariantes pour lesquelles l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrable est non nul. La transformation de Paley-Wiener peut s'interpréter comme une transformation unitaire de deux modèles de la représentation de G associée à l'orbite coadjointe D, soit par polarisation réelle, soit par polarisation totalement complexe. Elle est ainsi dictée par la théorie des représentations de G ([10], [13], [14]).

Nous essayâmes aussi de comprendre les espaces de L^2-cohomologie du complexe $\overline{\partial}$ pour certains espaces L^2 à poids sur D ([15]), mais ce furent des tentatives dont le succès fut très limité. Je suis revenue sur ce sujet en 1980. Il était alors à la page puisque les représentations de la série discrète des groupes de Lie semi-simples avaient été construites par des méthodes d'indice L^2 (R. Parthasarathy, M. S. Narasimhan, K. Okamoto, W. Schmid, M. F. Atiyah) . J'essayai de sortir du cadre strict des groupes de Lie semi-simples réels et de regarder la cohomologie à poids sur des domaines bornés homogènes généraux. Ce fut une période éprouvante, car je n'obtenais aucun résultat valable sur ce sujet, mais je ne pouvais non plus me résigner à l'abandonner. Heureusement je rencontrai Jonathan Rosenberg qui se montra intéressé par mes recherches et trouva des contre-exemples variés à ce que je pensais vrai. Ce fut une déception, mais je pus ensuite aborder d'autres thèmes. Nous publiâmes ensemble un article ([33]) essentiellement composé de ces contre-exemples. Par exemple, l'opérateur $\overline{\partial}$ opérant sur des espaces L^2 à poids n'est pas fermé, sa cohomologie peut exister en toute dimension, ou bien être nulle en toute dimension, ne pas donner lieu à une représentation irréductible de G, etc...

La méthode des orbites, bien que brumeuse dans le cadre d'un groupe de Lie général, suggère cependant un certain nombre de résultats philosophiques de grande importance. C'est ainsi que Duflo publia en 1977 le beau théorème prouvant que, pour tout groupe de Lie G, le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ est isomorphe en tant qu'algèbre commutative à l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathfrak{g}^*$. Ceci est relié à la méthode des orbites. En effet, grâce au caractère infinitésimal d'une représentation irréductible, le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ est un espace de fonctions sur $\hat{G}$, tandis que l'espace des polynômes G-invariants sur $\mathfrak{g}^*$ est un espace de fonctions sur l'espace des orbites $\mathfrak{g}^*/G$. Mais, d'après la philosophie de la méthode des orbites, l'espace $\mathfrak{g}^*/G$ serait en étroite relation avec $\hat{G}$ et donc serait aussi le spectre du centre de l'algèbre enveloppante. Ceci est essentiellement l'idée de la démonstration de Duflo, démonstration très ardue. Cet isomorphisme m'a toujours beaucoup intriguée. Bien entendu la fonction $j(X)^{-1/2}$ entre dans sa description. J'étendai cet isomorphisme (avec Rentschler) au centre du corps des fractions de l'algèbre enveloppante ([11]). J'aimerais trouver une démonstration simple de l'isomorphisme de Duflo, pour tout dire j'aimerais montrer que ce théorème est trivial, mais jusqu'à présent j'ai échoué. On conjecture d'ailleurs que cet isomorphisme s'étend aux hyperfonctions invariantes, ce q'une démonstration naturelle devrait montrer. En 1978, Masaki Kashiwara et moi avons publié une conjecture sur la formule de Campbell-Haussdorff ([20]) qui entraînerait ce fait, et en corollaire, des résultats difficiles, notamment d'Harish-Chandra, sur les convolutions invariantes. Nous avons démontré la validité de cette conjecture dans le cas d'un groupe de Lie résoluble. F. Rouvière a établi ensuite une formule similaire pour les espaces symétriques résolubles. Vingt ans après, les travaux de Lisa Jeffrey, A. Alekseev et E. Meinrenken, sur les constructions de variétés symplectiques par fusion, m'ont fait repenser à ce sujet. J'ai enfin montré que notre conjecture sur la formule de Campbell-Haussdorff était aussi valide pour les algèbres de Lie réductives. Cette démonstration est élémentaire et tient dans les cinq pages de la note [59]. Mais elle découle d'identités trop miraculeuses, et le cas général reste ouvert. Rappelons que les récents travaux de M. Kontsevitch sur l'existence de déformations de stuctures de Poisson conduit aussi à une démonstration de l'isomorphisme de Duflo, tout au moins pour les fonctions polynômiales. La déformation de Kontsevitch conduirait-elle naturellement à une preuve générale et naturelle de notre conjecture sur la formule de Campbell-Haussdorff ? Mais la virtuosité combinatoire de Kontsevitch me laisse coite, et la raison de l' isomorphisme de Duflo reste toujours mystérieuse pour moi.

Avec des modifications importantes, la formule universelle (1) des caractères des représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie résolubles fut prouvée par Duflo en 1969 (la note [2] est utilisée par Duflo pour un point de démonstration).

Par la suite, j'appellerai orbite générique une orbite coadjointe de dimension maximum. Si M est générique et quantifiable, on peut associer à M une représentation $Q(M)$ de G que j'appellerai tempérée. Comme je l'ai déjà indiqué, cette représentation $Q(M)$ peut être construite en utilisant des versions cohomologiques de la méthode d'induction par des polarisations réelles ou complexes.

La formule universelle (1) fut démontrée par W. Rossmann en 1978 pour les représentations tempérées des groupes de Lie semi-simples réels et par M. S. Khalgui pour les représentations tempérées d'un groupe de Lie général en 1982.

En 1979, je proposai une démonstration ingénieuse de la formule de Rossmann ([24]). Cependant, depuis, j'ai changé de point de vue sur ce que devrait être une bonne démonstration (sans d'ailleurs en trouver une), car il est clair pour moi qu'il s'agit d'une formule d'indice équivariant. Un certain nombre de mes articles ultérieurs reviendront ainsi sur la détermination du caractère des séries discrètes d'un groupe de Lie semi-simple réel G. Toutefois toutes mes démonstrations utiliseront à un point ou à un autre le théorème d'unicité d'Harish-Chandra, aussi ne suis-je pas arrivée à obtenir de démonstration naturelle. Ce théorème d'unicité dit qu'une distribution G-invariante tempérée sur $\mathfrak{g}$ et valeur propre des opérateurs de Casimir est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathfrak{k}$, où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe compact maximal K de G.

La formule universelle des caractères, telle qu'elle a été énoncée par Kirillov, présente des défauts majeurs. Lorsque l'orbite n'est pas de dimension maximum, il faut la modifier, mais comment ? Je répondrai partiellement à cette question en termes de cohomologie équivariante et proposerai une nouvelle formule universelle décrite dans la suite. Elle présente d'autre part un autre défaut : elle n'est définie que dans un voisinage de l'élément neutre de G. En 1984, M. Duflo, G. Heckman et moi-même, nous avons proposé une formule universelle du caractère d'une représentation T associée à une orbite quantifiable générique M, valable sur tout G lorsque G est un groupe algébrique réel ([31]). Cette formule dite *formule de descente* permet de donner (conjecturalement) le caractère de T sur le groupe G tout entier en utilisant des coordonnées de la forme $s \exp X$ où s est dans le sous-groupe compact maximal K de G et où X est un élément de $\mathfrak{g}$ stabilisé par s. Alors $\operatorname{tr} T(s \exp X)$ se calcule par une intégrale sur les points fixes de l'action de s sur M. Le but de l'article [31] est de démontrer la validité de cette formule pour le caractère d'une représentation de la série discrète d'un groupe de Lie réel semi-simple G, c'est-à-dire d'une représentation associée à une orbite elliptique générique quantifiable M. Pour cela, nous utilisons le théorème d'unicité d'Harish-Chandra et nous montrons que la formule de descente se déduit d'une belle formule pour la projection de la mesure de Liouville de M sur $\mathfrak{k}^*$. La formule de descente implique alors la formule de Blattner (démontrée par W. Schmid) qui décrit la restriction à K de la représentation T et donc elle implique *a fortiori* la formule de Rossmann. On entrevoit ainsi que la formule de descente est un outil beaucoup plus puissant qu'une formule de germe en 1 telle que l'était la formule universelle.

Un problème se posait dans mon esprit depuis longtemps. Puisque, pour tout groupe de Lie réel G, on espérait connaître explicitement le dual tempéré de G grâce aux orbites quantifiables génériques (ceci fut démontré par Duflo), on devrait pouvoir déduire la formule de Plancherel de G de la formule d'inversion de Fourier classique de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}^*$. Ce qui était mystérieux, c'était de comprendre comment le sous-ensemble des orbites quantifiables pourrait apparaître. Une idée m'est venue en 1980 dont j'étais enchantée à son apparition. Pour tout groupe de Lie G, il devrait y avoir une formule de Poisson : Considérons le sous-ensemble $\mathfrak{g}_G$ de $\mathfrak{g}$ formé des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que $\exp X = 1$. Si G est un tore, ceci est un réseau de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Dans le cas général, l'ensemble $\mathfrak{g}_G$ est un ensemble d'orbites de G dans $\mathfrak{g}$, tandis que l'ensemble $\mathfrak{g}_G^*$ des orbites quantifiables est un ensemble d'orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$. Soit ϕ une fonction sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Sa transformée de Fourier $\hat{\phi}$ est une fonction sur $\mathfrak{g}^*$. Je conjecturai que, pour des mesures G-invariantes appropriées, on a la formule de Poisson-Plancherel

$$\int_{\mathfrak{g}_G} \phi = \int_{\mathfrak{g}_G^*} \hat{\phi}.$$

Je démontrai cette conjecture dans le cas d'un groupe de Lie semi-simple réel ([27]) en utilisant des résultats combinatoires cabalistiques de R. Herb. Mon étudiant Peter Dourmashkin généralisa cette méthode à certains cas non linéaires. L'aide de Dale Peterson me permit de rendre simple la combinatoire de cette démonstration ([35]). Dans [36], nous avons ensuite montré, Duflo et moi, que cette formule de Poisson convenablement améliorée par la méthode de descente conduit en fait à une démonstration directe et simple de la formule de Plancherel de G, obtenue par Harish-Chandra par des méthodes d'intégrales en paquets d'onde . Depuis, les résultats de P. Torasso et M. S. Khalgui ont confirmé cette conjecture.

Plus récemment, Duflo et moi, nous nous sommes intéressés à la construction et aux caractères des représentations d'un groupe de Lie semi-simple réel obtenues par le foncteur de Zuckermann, version algébrique de l'indice L^2 (les données analytiques globales sont remplacées par des données sur un voisinage formel d'une K-orbite dans l'orbite coadjointe M). Nous avons donné une démonstration rapide dans la note [38] d'un théorème dû à Knapp-Vogan et Wallach montrant que le foncteur de Zuckermann préserve les modules munis de formes hermitiennes G-invariantes. Ainsi par induction parabolique, on peut associer à toute orbite quantifiable fermée, mais non nécessairement de dimension maximum, une représentation unitaire irréductible de G. (Une telle orbite M admet une polarisation G-invariante, mais la structure unitaire de $Q(M)$ reste très mystérieuse. *A priori* l'espace $Q(M)$ n'admet qu'un produit hermitien G-invariant. C'est un miracle que ce produit hermitien soit défini positif). Nous avons établi une version plus algébrique du théorème d'unicité d'Harish-Chandra en remplaçant la condition tempérée par une condition de cohérence par rapport aux produits tensoriels avec des représentations de dimension finie ([43]). Ce théorème nous était indispensable pour l'étude des caractères des représentations obtenues par G. Zuckerman, représentations qui ne sont pas tempérées. Ainsi avons nous pu démontrer que la nouvelle formule universelle donnait le caractère de ces représentations.

La quantification des orbites nilpotentes d'un groupe de Lie semi-simple réel G reste mystérieuse. En effet, elles n'admettent en général ni polarisations G-invariantes, ni structures pseudo-kähleriennes G-invariantes, ... Dans [23], les multiplicités d'une représentation T de G sous l'action du sous-groupe compact maximal sont reliées au front d'onde de T qui est une réunion d'orbites nilpotentes.

Je remarque dans [45] qu'une orbite nilpotente réelle $O_{\mathbb{R}}$ est munie d'une structure de cône complexe K-invariante pour laquelle $K_{\mathbb{C}}$ agit transitivement. Plus particulièrement, je montre que $O_{\mathbb{R}}$ est K-difféomorphe à l'orbite de Kostant-Sekiguchi qui est un cône complexe homogène sous l'action de $K_{\mathbb{C}}$. Ceci découle immédiatement de la théorie des instantons de P. Kronheimer, théorie très “abstraite”. J'espère que d'autres mathématiciens trouveront à l'avenir un moyen plus “concret” pour expliciter la structure complexe d'une orbite nilpotente réelle. Un travail de Schmid et Vilonen, en 1999, a beaucoup simplifié certains points de ma construction.

L'article [53] démontre pour certaines orbites nilpotentes une version très affaiblie de la nouvelle formule universelle. J'y démontre une conjecture de David Vogan pour les orbites nilpotentes des groupes de Lie réductifs complexes. Peut-on utiliser les descriptions à la Kronheimer pour démontrer plus ?, par exemple pour démontrer les conjectures de Vogan dans le cas général ?

Représentations à énergie positive de groupes de Lie semi-simples réels et représentation métaplectique. Soit G un groupe de Lie réel simple et K son sous-groupe compact maximal. Si G/K admet une structure complexe G-invariante, on dira que G/K est un domaine hermitien symétrique. Dans ce cas le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ est non nul. Soit Z un générateur du centre de $\mathfrak{k}$. J'appellerai représentation à énergie positive une représentation de G telle que l'opérateur iZ y ait un spectre discret et positif. Les représentations de la série discrète holomorphe de G sont des représentations à énergie positive.

Les domaines hermitiens symétriques sont des exemples de domaines de Siegel, notamment “le” domaine de Siegel classique (qui est l'espace des modules des variétés abéliennes de dimension donnée) est obtenu pour le groupe symplectique $G = Sp(n, \mathbb{R})$. Hugo Rossi et moi avions découvert que les structures hilbertiennes sur l'espace des fonctions holomorphes sur $D = G/K$ pouvaient varier dans un domaine plus grand que celui de la théorie d'Harish-Chandra des séries discrètes holomorphes de G. Ceci nous a conduit à trouver des petites représentations unitaires à énergie positive du groupe G ([13]). En particulier, ces représentations sont de mesure nulle pour la mesure de Plancherel de $\hat{G}$. Ce sont des représentations assez mystérieuses, sans doute associées à des petites orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$, mais la correspondance exacte n'est pas élucidée. Devra Garfinkle entreprendra une étude algébrique de ces petites représentations.

Dans notre travail, il apparaissait également des représentations unitaires dans des espaces de Hilbert de solutions d'équations différentielles. Il était bien connu des physiciens, par exemple Bateman et Cunningham, qu'il y avait une représentation unitaire du groupe conforme $O(2, n)$ dans l'espace des solutions de l'équation de Maxwell sur l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1+n}$, représentation qui étendait la représentation naturelle du groupe $O(1, n)$. J'appris ceci d'Irving Segal en 1976 lorsque j'arrivai au Massachussets Institute of Technology et je collaborai sur ce sujet ([21]) avec quelques uns des jeunes mathématiciens gravitant autour de lui, principalement Hans Plesner Jakobsen. H. P. Jakobsen et moi avons donné des constructions assez générales de structures unitaires sur ces espaces de solutions ([17], [25]). Une de mes étudiantes, Lisa Mantini, se préoccupa de décrire le lien avec la théorie des twisteurs de Penrose. Elle continue d'étudier ces liens, avec ses propres étudiants. Avec Kashiwara, je m'intéressai aux possibles systèmes d'équations invariantes, ainsi nous déduisîmes l'invariance de l'équation de Maxwell de l'invariance de l'équation des ondes ([16]).

Nolan Wallach qui avait travaillé sur ce même sujet avait montré le rapport entre ces représentations dans des espaces de solutions d'équations différentielles et la représentation mystérieuse par excellence, la représentation métaplectique. C'est une représentation projective du groupe $Sp(n, \mathbb{R})$ des transformations linéaires symplectiques de l'espace $\mathbb{R}^{2n}$. On peut par exemple la réaliser dans l'espace de fonctions $L^2(\mathbb{R}^n)$ en privilégiant un lagrangien. L'indice de Leray-Maslov produit une obstruction à ce que cette représentation soit une vraie représentation du groupe $Sp(n, \mathbb{R})$. Ce n'est qu'une représentation de son recouvrement à deux feuillets, le groupe métaplectique. Il semblait donc utile de comprendre les constructions très différentes de cette représentation par I. Segal, D. Shale et A. Weil, représentation qui existe aussi bien sur les corps finis que pour un espace symplectique de dimension infinie. Ma note [18] précise l'état du vide dans le cadre infini. Je m'employai aussi, avec Gérard Lion, dans la première partie de notre livre [L.2] à décrire avec une précision accrue la construction du groupe métaplectique et de sa représentation.

Je repris, avec Kashiwara, le problème des représentations à énergie positive que nous avions découvertes, Rossi et moi, parallèlement à

Nolan Wallach. Notre travail ([19]) établit l'analogue de la dualité de Schur entre représentations du groupe symétrique et représentations du groupe $GL(n)$. L'idée simple en est la suivante. Réalisons la représentation métaplectique T dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Considérons son produit tensoriel T^k par elle-même k fois. C'est une représentation dans $L^2(\mathbb{R}^{n\times k})$. On voit alors que le groupe $O(k)$ opère en commutant avec l'action de T^k. Nous montrons que les sous représentations irréductibles de T^k sont paramétrées par certaines représentations irréductibles du groupe compact orthogonal $O(k)$. Ce travail nous amena à conjecturer que toutes les représentations unitaires à énergie positive des groupes $Sp(n,\mathbb{R})$ et $U(p,q)$ apparaissent ainsi. Ceci sera démontré plus tard par plusieurs mathématiciens, dont H. P. Jakobsen. Ces constructions nous ont aussi permis de comprendre la décomposition de la représentation du groupe $G = Sp(n,\mathbb{R})$ agissant sur l'espace des fonctions sur le bord de Shilov du domaine de Siegel ([22]).

Entraînée par le sujet de la représentation métaplectique, je me préoccupai vers 1978 de fonctions θ et de correspondances de Shintani entre fonctions θ. Bien que la deuxième partie de mon livre [L.2] ait, semble-t-il, beaucoup intéressé les spécialistes des fonctions θ, j'ai l'impression aujourd'hui que je suis finalement restée peu concernée intérieurement par les problèmes traités. Cependant, il est clair que mon idée de la formule de Poisson-Plancherel est née de cette période d'engouement pour les séries θ.

Dans le travail [26] sur les domaines hermitiens symétriques, je découvris avec Nicole Berline une caractérisation des intégrales de Poisson sur G/K provenant du bord de Shilov. Ainsi nous avons donné une généralisation des systèmes d'équations trouvés par Hua.

Cohomologie équivariante. On savait depuis Atiyah-Bott que des formules de points fixes existent en théorie de l'indice. La formule de Weyl en est un exemple frappant : on peut réaliser une représentation irréductible d'un groupe de Lie compact dans un espace de sections holomorphes d'un fibré en lignes sur la variété des drapeaux. En appliquant la formule d'Atiyah-Bott pour l'indice de l'opérateur $\overline{\partial}$, on obtient la formule de Weyl. Pour démontrer la formule universelle (1) pour un groupe de Lie semi-simple, il faut démontrer des formules exactes pour les transformées de Fourier d'orbites coadjointes, tout au moins pour leur restriction à $\mathfrak{k}$. C'est ce que Rossmann avait fait et que j'avais simplifié, mais en utilisant toute la structure du groupe semi-simple G. Je trouvais dans ces formules explicites une réminiscence des formules de points fixes en K-théorie, mais n'en trouvais pas d'analogue en cohomologie. Un article de R. Bott fort intéressant montrait cependant que si le groupe S^1 est un groupe de symétrie d'une variété M ayant un nombre fini de points fixes, le calcul de certains nombres caractéristiques de M devient très facile. Ceci était bien connu pour la caractéristique d'Euler de M : c'est simplement le nombre de points fixes de l'action de S^1.

En 1982, Nicole Berline vint travailler avec moi au MIT. Nous eûmes l'idée d'un complexe qui éclairait beaucoup les calculs de Bott. Nous avons nommé ce complexe le complexe des formes différentielles équivariantes et avons donné une application immédiate de cette nouvelle théorie : la formule de Rossmann pour les caractères des groupes de Lie semi-simples ([28]). Il fut clair pour nous que ces calculs exacts et sans difficultés étaient le signe de la grande efficacité de ce complexe que nous croyions avoir inventé. En fait, nous avions simplement ressuscité un complexe dû à Henri Cartan. Toutefois je crois que nos travaux dans les années qui suivirent ont montré la puissance inconnue jusqu'alors de cet outil. Nous démontrâmes ainsi très rapidement une formule de localisation en cohomologie équivariante ([29]). Cette formule magique rend purement algébrique le calcul d'un certain nombre d'intégrales rencontrées en théorie des groupes ou en mécanique. Comme cas particulier, cette formule donne une démonstration simple de la formule de phase stationnaire exacte de Duistermaat-Heckman. Cette formule de Duistermaat-Heckman avait suscité un grand intérêt. En effet, E. Witten, par une démarche analogue à la nôtre, avait lui aussi suggéré vers 1982 une formule de localisation. De plus, il avait expliqué comment la formule d'indice d'Atiyah-Singer s'obtenait comme conséquence de la formule de phase stationnaire exacte appliquée à une intégrale sur la variété des lacets LM d'une variété compacte M. Je reviendrai sur les progrès suscités par cette idée de Witten en théorie de l'indice par la suite.

Qu'est-ce que la cohomologie équivariante de M ? Soit G un groupe opérant sur un espace topologique M. On peut alors construire un espace topologique M_G de dimension infinie appelé quotient universel de M . A. Borel avait défini la cohomologie équivariante de M comme la cohomologie ordinaire de cet espace M_G. Lorsque G agit sans points fixes sur M, la cohomologie équivariante de M est isomorphe à la cohomologie de l'espace M/G. Par ignorance, Nicole Berline et moi avions associé à l'action d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable M un autre complexe : celui des formes différentielles équivariantes. Notre point de vue, très proche sans le savoir de celui de H. Cartan, était cependant formulé d'une manière plus souple. Pour nous, une forme différentielle sur M est simplement une forme différentielle $\alpha(X)$ ordinaire sur M, mais dépendant aussi de $X \in \mathfrak{g}$. Une forme différentielle équivariante $\alpha(X)$ est fermée si elle vérifie la relation algébrique $d(\alpha(X)) = \iota(X_M)\alpha(X)$ où d est la différentielle de de Rham ordinaire sur M et $\iota(X_M)$ la contraction par le champ de vecteurs X_M produit par l'action infinitésimale de $X \in \mathfrak{g}$. Par exemple si X est un champ de vecteurs hamiltonien sur une variété symplectique (M, σ)

avec fonction hamiltonienne associée $\mu(X)$, la forme différentielle inhomogène $\mu(X)+\sigma$ est une forme équivariante fermée sur M. Le point de vue forme différentielle "fonction de X" et inhomogène était nouveau. Il est utile. On peut calculer la valeur d'une forme équivariante en un point X de $\mathfrak{g}$, inverser cette forme $\alpha(X)$ sur l'ouvert de $\mathfrak{g}$ où le terme de degré extérieur 0 de cette forme est inversible, etc... Ainsi, lorsque G et M sont compacts, l'intégrale d'une forme équivariante fermée sur M n'est pas un nombre, mais une fonction sur l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ calculable en un élément X en terme de la variété des points fixes du groupe de transformations de M engendré par X et de la classe d'Euler de son fibré normal, grâce à la formule "magique". Ainsi le "volume" équivariant d'une variété G-hamiltonienne (M,σ) n'est pas un nombre, mais une fonction sur $\mathfrak{g}$. C'est par définition

$$\mathrm{vol}\,(X) = (2i\pi)^{-\dim M/2} \int_M e^{i(\mu(X)+\sigma)}.$$

D'après [29], cette fonction est calculable explicitement en fonction des points fixes de l'action de G sur M si G est un tore. Le volume symplectique ordinaire de M est la valeur de cette fonction lorsque $X = 0$. Ce point de vue fonctionnel, qui est aussi le point de vue de Witten, nous permet une grande souplesse et une grande simplicité. Dans la version topologique (que d'ailleurs nous ignorions en 1982) les variables additionnelles X sont des classes de cohomologie de degré 2, en particulier sont toujours nilpotentes. Il est clair qu'on ne peut appliquer la méthode de phase stationnaire dans ce cadre. C'est ce point de vue fonctionnel qui sera tout de suite adopté par Jean Michel Bismut. Je suis heureuse de voir qu'il est aussi maintenant repris et utilisé avec beaucoup de succès par de nombreux mathématiciens : E. Getzler, V. Guillemin et ses élèves, ..., et aussi par F. Kirwan qui est la grande spécialiste de la cohomologie équivariante.

Ultérieurement, j'ai développé avec Duflo et Shrawan Kumar la théorie de la cohomologie équivariante. Nous avons associé à l'action d'un groupe G sur une variété différentiable M divers objets cohomologiques $\mathcal{H}_G(M), \mathcal{H}_G^{\infty}(M), \mathcal{H}_G^{-\infty}(M)$. Dans le cas où M est un point, ces espaces sont respectivement l'espace des fonctions polynomiales G-invariantes sur $\mathfrak{g}$, des fonctions C^{∞}-invariantes ou des distributions invariantes. Dans un exemple significatif ([39]), Duflo et moi avions montré qu'il était utile d'inverser, dans un espace de formes différentielles à coefficients distributions sur $\mathfrak{g}$, des formes différentielles équivariantes, en particulier la classe d'Euler équivariante. Duflo, Shrawan Kumar et moi avons calculé ces objets pour des espaces homogènes G/H lorsque (par exemple) H est un sous-groupe compact de G, lorsque G agit librement sur M et dans diverses situations ([L.4]). De plus, inspirés par notre formule de descente précédente, Duflo et moi avons introduit des groupes $\mathcal{K}_G(M)$ dont nous pensons qu'ils sont une version "à la de

Rham" de la K-théorie équivariante de M. Lorsque M est un point, le groupe $\mathcal{K}_G(M)$ est simplement l'espace $C^\infty(G)^G$ des fonctions C^∞ et G-invariantes par conjugaison sur le groupe G. Lorsque M est une G-variété et lorsque G est compact, alors un représentant de $\mathcal{K}_G(M)$ est une famille $(\alpha_s(X))_{s\in G}$ de formes différentielles équivariantes sur la variété des points fixes pour l'action de s dans M, satisfaisant certaines conditions. Nous appelons bouquet de formes équivariantes une telle famille α_s. Lorsque G est un groupe algébrique réel, nous avons aussi défini avec soin l'espace $\mathcal{K}_G(M)$. Si $M = G/H$ et H est compact, notre groupe $\mathcal{K}_G(M)$ est l'espace des fonctions H-invariantes par conjugaison sur le groupe H. Nous avons établi pour cette théorie quelques propriétés de base : image directe par des fibrations propres, isomorphisme de Thom, etc.... Il est cependant clair qu'il faudrait encore affiner cette théorie et la relier de manière indubitable à la cohomologie cyclique d'A. Connes. Le travail de Block-Getzler montre en effet un lien profond entre ces deux théories.

Le formalisme des bouquets de classes équivariantes est indispensable pour donner des formules d'indice pour les opérateurs transversalement elliptiques. Je décrirai l'apport du formalisme de la cohomologie équivariante aux théorèmes d'indices équivariants dans la suite.

Donnons cependant quelques autres applications de la cohomologie équivariante. Si M est une variété symplectique compacte munie d'une action hamiltonienne d'un groupe compact K, alors l'image par l'application moment $f : M \to \mathfrak{k}^*$ de la mesure de Liouville de M est un invariant remarquable. Dans le cas d'un tore T, c'est une mesure localement polynomiale supportée sur un polytope convexe. Cette mesure est calculée par Duistermaat-Heckman. Dans [31], nous avions déjà donné, Duflo, Heckmann et moi-même, des formules pour l'image sur $\mathfrak{k}^*$ de la mesure de Liouville dans le cas d'une orbite elliptique régulière d'un groupe semi-simple réel G en utilisant une technique inspirée de la formule de localisation abélienne [29]. Mon étudiant Jyoti Sengupta calcula l'image de la mesure de Liouville pour toute orbite semi-simple de dimension maximum. Ce travail fut amélioré par Paul Paradan, qui calcule l'image de la mesure de Liouville pour toute orbite semi-simple. Je repris avec Duflo les calculs de projection de mesure de Liouville. Nous avons calculé les projections sur $\mathfrak{k}^*$ des mesures de Liouville de toutes les orbites elliptiques en localisant sur un voisinage d'une K-orbite grâce à une méthode de phase stationnaire ([39]). La nature du complexe de cohomologie équivariante permet en effet une grande souplesse pour localiser sur différentes sous variétés.

Mon article [46] s'inspire de la lecture d'un article de L. Jeffrey et F. Kirwan, mais je montre que leurs résultats peuvent être établis sous des hypothèses plus faibles. Seule la cohomologie d'un complexe proche du complexe de Cartan compte. Ceci permet une démonstration très élémentaire de la formule de localisation non abélienne que Witten suggéra en 1992 ainsi que de la mesure localement polynomiale de Duistermaat-Heckman.

Pour mieux comprendre les calculs algébriques auxquels conduisent les formules de localisation, il est important de comprendre la structure de l'anneau des fonctions rationelles à pôles dans des hyperplans. C'est ce j'étudie, avec Michel Brion dans l'article [57]. Ainsi l'inversion de la formule de Laplace par la méthode des résidus de Jeffrey-Kirwan permet de calculer explicitement des mesures localement polynomiales mesurant des volumes d'espaces réduits ou de polytopes convexes. Cependant, les calculs algébriques sont souvent d'une grande complexité. Considérons par exemple le vieux problème des carrés magiques : on cherche les matrices carrées $n \times n$ à coefficients entiers positifs disposés de telle sorte que la somme des entiers de chaque ligne, et de chaque colonne, soit le même entier k. On ne connait pas de formule pour le nombre de carrés magiques de taille n et de somme k, ou même une borne asymptotique lorsque k tend vers l'infini. En utilisant la méthode d'inversion de l'article [57], et de formules d'Aomoto, j'ai pu réobtenir des résultats sur les triangles magiques, c'est-à-dire des carrés magiques de forme très particulière, avec. Ce genre de mathématiques "concrètes" est nouveau pour moi et j'y apprends beaucoup.

Dans l'article sur la formule de Szenes [58], il s'agit d'expliciter un isomorphisme, par des formules sommatoires à la Eisenstein, entre fonctions rationelles sur un espace vectoriel (à pôles dans des hyperplans) ou sur un tore. La formule de résidus de Szenes pour les fonctions zeta de Witten (ces fonctions permettent de calculer des volumes de certains espaces de modules, apparaissant comme espaces réduits) s'explique naturellement par ces formules sommatoires. J'espère travailler avec Andras Szenes sur le cas plus délicat de formules de résidus sur des tores.

Par ailleurs, W. Rossmann montra que la formule de localisation [29] se généralisait sous certaines hypothèses à une variété algébrique. Ceci permet de définir une généralisation de la formule de Lelong pour la multiplicité. Ainsi, si C est un cône équivariant sous l'action de G, la multiplicité équivariante est un polynôme sur $\mathfrak{g}$ et se calcule par intégration d'une forme équivariante sur C. J'utilisai ces résultats de Rossmann pour démontrer les propriétés remarquables des polynômes de Joseph associés à une orbite nilpotente ([40]), qui donnent un modèle explicite de la représentation de Springer dans un espace de polynômes sur l'algèbre de Cartan. Mon étudiant, Eric Vasserot, a déterminé de merveilleuses représentations du groupe $GL(n)$ dans des espaces de polynômes sur l'algèbre de Cartan qui se prêtent à des déformations quantiques. En collaboration avec M. Varagnolo, il a développé depuis des outils extrêmement puissants pour l'étude des représentations des groupes quantiques.

Je me suis aussi intéressée à l'image de la mesure de Liouville dans un cadre algébrique. En particulier, je montre dans [53] le comportement localement polynomial de la mesure image pour un cône complexe C et son rapport asymptotique avec les multiplicités des représentations de G dans l'anneau des fonctions régulières sur C.

Mon étudiant, Alberto Arabia, calcula les multiplicités équivariantes en un point de l'adhérence d'une cellule de Schubert. Son calcul rendait très plausible le beau critère donné par Shrawan Kumar sur la lissité des cellules de Schubert. Arabia donnera d'ailleurs ensuite un critère de lissité rationelle, dans un cadre beaucoup plus général.

Avec Michel Brion, dans le document électronique [56], nous montrons qu'un théorème de Chang-Skelbred permet de calculer très simplement la cohomologie équivariante de certaines variétés telles que la variété des drapeaux (Arabia-Kostant), de variétés toriques, des variétés de Goreski-Kottwitz-Mac-Pherson, et des compactifications de de Concini-Procesi.

Indice des opérateurs et Formule universelle. Mon intérêt pour le complexe des formes différentielles équivariantes visait au départ la démonstration de la formule de Rossmann. Rappelons que les représentations de la série discrète étaient construites comme solutions L^2 de l'opérateur de Dirac sur la variété non compacte M correspondante. J'aurais trouvé épatant de pouvoir généraliser au cas du caractère les calculs faits par Connes et Moscovici pour la dimension formelle de telles représentations (de dimension ordinaire infinie). Mais d'abord il me fallait comprendre le calcul de l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac D pour une variété compacte M. En 1983, le sujet était de nouveau d'actualité. En effet, Atiyah reprenant les idées de Witten avait montré que la formule d'indice d'Atiyah-Singer pour l'opérateur de Dirac $D_{\mathcal{E}}$ twisté :

$$\text{indice}(D_{\mathcal{E}}) = \int_M \mathrm{ch}\,(\mathcal{E})\hat{A}(M) \tag{3}$$

s'obtenait comme conséquence formelle de la formule de localisation pour l'action de S^1 sur la variété des lacets LM. Le mystérieux genre $\hat{A}(M)$ de Lichnerowicz apparaissait naturellement comme l'inverse de la classe d'Euler du fibré normal à M dans la variété LM.

Comme le genre $\hat{A}(M)$ est associé à la fonction $x/sh(x)$ qui intervient aussi dans la théorie des groupes de Lie comme jacobien de l'application exponentielle, et aussi pour des raisons moins claires dans l'isomorphisme de Duflo, dans les formules de caractères, etc... j'étais attentive à toute interprétation de cette fonction. Il ne fallut pas longtemps à Bismut pour rendre l'approche de Witten rigoureuse. Cependant, il utilisait tout l'arsenal des probabilités. En assistant à des exposés sur le travail de Bismut, nous eûmes, Nicole Berline et moi, l'idée d'une démonstration non probabiliste ([34]). Elle est issue de celle de

Bismut et possède de grandes similarités avec elle. Dans ses formules probabilistes, un chemin brownien ne contribue que par son holonomie à l'intégrale. Il nous apparut alors qu'il était possible d'obtenir une formule explicite pour le développement asymptotique local du noyau de la chaleur e^{-tD^2} sur M en intégrant un noyau de la chaleur sur la fibre du fibré des repères de M, c'est-à-dire le groupe orthogonal. Voici un problème *a priori* sans symétrie— une variété M et l'opérateur de Dirac sur M— où certains calculs ne deviennent évidents que lorsque l'on considère cette situation comme quotient d'une situation avec symétrie. Le fibré P des repères de M a en effet comme groupe de symétries le groupe orthogonal. Nous interprétons alors l'espace des solutions de l'opérateur de Dirac sur M comme l'espace des solutions G-invariantes de l'équation de la chaleur sur l'espace des fonctions sur P tensorisé par la représentation spinorielle de G. Cette idée provenait de notre familiarité avec les représentations induites de groupes de Lie et avec le calcul de la supertrace de la représentation spinorielle. Le genre $\hat{A}(M)$ apparaît ainsi relié à l'application exponentielle le long d'une fibre de la projection $P \to M$. Cette approche nous a aussi permis le calcul de l'évaluation asymptotique du noyau de la chaleur pour l'opérateur de Dirac équivariant sur M. Ainsi la formule des points fixes d'Atiyah-Segal-Singer a, elle aussi, une démonstration directe et simple par l'équation de la chaleur, ainsi qu'une interprétation locale. Ceci avait été l'objet de recherches préalables, mais les difficultés d'une approche par les invariants étaient insurmontables. Seule l'approche probabiliste de Bismut était assez naturelle pour donner une démonstration. La nôtre s'en inspire et donne, je crois, la démonstration la plus directe et la plus simple de ce théorème fondamental.

Nous avons étendu cette méthode au cas des familles d'opérateurs de Dirac ([37]). Nous utilisons la notion de superconnexion due à Quillen et montrons que par passage à la limite lorsque t tend vers l'infini, une superconnexion adaptée permet de calculer le caractère de Chern de sous-fibrés définis par des équations. C'est un théorème utile dans de nombreuses situations. Dans le cas de familles d'opérateurs de Dirac, l'évaluation asymptotique lorsque t tend vers 0 du noyau de la chaleur associée à la superconnexion de Bismut est effectuée grâce à un fibré de repères. Le théorème de l'indice local des familles, dû à Bismut, se déduit de ces deux évaluations asymptotiques.

En 1985, en commun avec Ezra Getzler, qui avait trouvé lui aussi (à l'âge de 19 ans) une démonstration limpide de la formule d'Atiyah-Singer en attribuant un degré positif aux opérations de Clifford dans la fibre du fibré spinoriel, nous entreprîmes la rédaction du livre [L.3] incorporant les nouvelles idées de Bismut, de Getzler et les nôtres sur la démonstration des théorèmes d'indice pour l'opérateur de Dirac. Je crois que ce travail est utile. Je l'espère, car cette rédaction m'a pris beaucoup de temps. Nos méthodes, souvent inspirées par Bismut, restent très élémentaires et basées sur le calcul extérieur et le calcul de Clifford. Ainsi des calculs algébriques peuvent remplacer dans beaucoup de cas les calculs probabilistes de Bismut. Toutefois, jamais je n'aurais eu l'intuition des bons opérateurs ou des bonnes superconnexions à considérer sans les travaux préalables de Bismut.

Ce travail m'a permis de formuler quelques idées sur la quantification géométrique :

-La méthode des orbites peut et doit s'unifier avec la théorie de l'indice des opérateurs de Dirac.

-L'utilisation de la cohomologie équivariante est indispensable à l'unification de ces deux théories.

En effet qu'est-ce que la quantification géométrique ? Il me semble qu'on doit reformuler cette question comme une question d'existence d'images directes.

Soit G opérant sur une variété M. Y a-t-il une application faisant correspondre à une variété M munie d'un fibré G-équivariant $\mathcal{E}$ une représentation "canonique" $Q(M, \mathcal{E})$ de G et qui vérifie certaines propriétés : si M est compacte, la représentation $Q(M, \mathcal{E})$ devrait être de dimension finie ; si M est homogène, la représentation devrait être somme finie de représentations irréductibles, etc... Dans le cadre où M est complexe et $\mathcal{E}$ un fibré holomorphe, une réponse satisfaisante pour $Q(M, \mathcal{E})$ est l'espace virtuel formé de la somme alternée des espaces de cohomologie du faisceau des sections holomorphes de $\mathcal{E}$. On voit ainsi qu'il faut d'abord renoncer à associer à M et à $\mathcal{E}$ une vraie représentation, mais plutôt se résoudre à considérer une représentation virtuelle de G. Atiyah et Hirzebruch ont montré que l'indice des opérateurs de Dirac était l'analogue obligé en géométrie différentielle du théorème de Riemann-Roch en géométrie algébrique. Il est donc naturel de prendre comme définition de $Q(M, \mathcal{E})$, lorsque G et M sont compacts, l'espace différence des spineurs harmoniques pairs et impairs pour l'opérateur de Dirac sur M twisté par $\mathcal{E}$. Lorsque M est une variété symplectique munie d'un fibré de Kostant-Souriau $\mathcal{L}$, alors la correspondance associant à M la représentation $Q(M, \mathcal{L})$ devrait être la correspondance entre variété symplectique et espace de Hilbert recherchée en mécanique quantique sous le nom de quantification géométrique.

Je pense donc que la théorie de la quantification géométrique est une théorie d'image directe. L'objet $Q(M, \mathcal{E})$ dans le cadre d'une variété M non compacte est plus difficile à cerner, car $Q(M, \mathcal{E})$ est certainement de dimension infinie. Dans le meilleur des mondes, ce devrait être une représentation virtuelle traçable de G, si par exemple l'espace des orbites M/G est compact. On pourra donc se préoccuper de donner une formule pour la trace de $Q(M, \mathcal{E})$.

Dans ce but, Nicole Berline et moi avons généralisé la théorie des classes caractéristiques de M (classes d'Euler, classe $\hat{A}$) au cas équivariant ([30]). Ces classes sont ainsi associées à des fibrés munis de connexions G-invariantes.

L'objet de l'article [32] et de mon intervention au congrès international de Varsovie en 1983 est de proposer une nouvelle formule universelle qui unifie en particulier la formule de Kirillov avec la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour l'indice des opérateurs de Dirac. Ainsi, si M est une variété orientée de dimension paire munie d'un fibré en lignes G-équivariant $\mathcal{L}$ de courbure équivariante $i(\mu(X)+\sigma)$, nous proposons pour le caractère de la représentation quantifiée $Q(M,\mathcal{L})$ associée à M la formule

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tr} Q(M,\mathcal{L})(\exp X) = (2i\pi)^{-\dim M/2} \int_M e^{i(\mu(X)+\sigma)} \hat{A}(M)(X).$$

Comme pour la formule universelle, si M n'est pas compacte, cette formule doit s'interpréter au sens distribution après intégration contre une fonction test sur $\mathfrak{g}$. Ici le genre équivariant $\hat{A}(M)(X)$ est une forme équivariante fermée sur M prolongeant le genre $\hat{A}(M)$ de Lichnerowicz. Nous ne savons cependant pas le construire en toute généralité car, si le groupe G n'est pas compact, il n'est pas toujours possible de construire une connexion G-invariante sur le fibré tangent. Nous en donnons d'ailleurs une autre définition (conjecturale) dans le cadre des orbites coadjointes.

Si M et G sont compacts, cette formule n'est qu'une variante de la formule d'Atiyah-Segal-Singer. C'est la formule des points fixes "délocalisée". Cependant, cette variante a aussi une interprétation en termes de comportement asymptotique du noyau de la chaleur. C'est un résultat dû à Bismut, que nous redémontrons dans le livre [L.3] cité. De plus, elle nous suggéra une formule pour le cas des opérateurs transversalement elliptiques.

Lorsque M est une orbite coadjointe générique, la nouvelle formule universelle coïncide avec la formule de Kirillov : une orbite coadjointe de dimension maximum est très particulière. En fait la note [2] a pour conséquence que le fibré tangent de M est stablement égal au fibré trivial $M \times \mathfrak{g}^*$. La forme $\hat{A}(M)(X)$ est alors une fonction sur $\mathfrak{g}$, c'est la mystérieuse fonction $j^{-1/2}(X)$.

Il était indispensable de donner une formule de descente valable sur tout le groupe G. Nous avons proposé en 1992, Duflo et moi, une formule conjecturale qui donnerait le caractère de la représentation virtuelle $Q(M,\mathcal{E})$ associée à un fibré $\mathcal{E}$ muni d'une connexion G-invariante $\mathbb{A}$. Le type de formule proposée est le suivant. Soit s un élément du sous groupe compact maximal K de G. Soit $\mathfrak{g}(s)$ l'ensemble des points fixes de s dans $\mathfrak{g}$ et $M(s)$ l'ensemble des points fixes de l'action de s sur M, alors pour $X \in \mathfrak{g}(s)$

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tr} Q(M,\mathcal{E})(s \exp X) = \int_{M(s)} I_s(X)$$

où $I_s(X)$ est une certaine forme équivariante fermée sur $M(s)$ construite canoniquement à partir de la connexion $\mathbb{A}$.

Cette formule fut l'objet de mon exposé au congrès européen à Paris en 1992 ([44]). Elle est évidemment vraie si G et M sont compacts. C'est en effet un cocktail des formules d'Atiyah-Segal-Singer et de la formule de Kirillov. Nous montrons qu'elle est aussi vraie pour les représentations de Zuckermann et pour la représentation métaplectique. Dans ce cas, nos démonstrations font appel aux résultats d'Harish-Chandra, ou tout au moins à notre version du théorème d'unicité [43].

Mon travail sur les opérateurs transversalement elliptiques montre aussi clairement la nécessité de la cohomologie équivariante dans la formulation de traces de représentations. Le problème est le suivant. Soit G un groupe de Lie compact opérant sur une variété compacte M. Un opérateur transversalement elliptique P est un opérateur elliptique dans les directions transverses aux orbites de G dans M. Dans ce cas, l'indice de P peut être défini comme une distribution sur G. Peut-on donner une formule cohomologique pour l'indice de P en fonction du symbole principal de P ? On ne peut donner une réponse en termes de points fixes. En effet, on peut construire facilement des opérateurs transversalement elliptiques pour une action de G sans points fixes et dont l'indice soit une dérivée d'ordre arbitrairement grand de la masse de Dirac au point e de G. Ce problème avait été considéré par Atiyah et il y avait donné une réponse seulement en terme d'algorithme. Pour un groupe de Lie non compact, on sait qu'il faut interpréter la formule universelle comme une égalité de distributions et non point par point. Nicole Berline et moi, nous avons donc pensé, par analogie, qu'une formule pour l'indice de P en termes de cohomologie équivariante pouvait exister ayant un sens distribution. Nous associons ainsi à un opérateur transversalement elliptique P une superconnexion $\mathbb{A}$ et son caractère de Chern $\operatorname{ch}(\mathbb{A})(X)$ qui est une forme différentielle équivariante sur T^*M. La formule d'indice pour P s'écrit alors comme une généralisation évidente de la version délocalisée de l'indice de l'opérateur de Dirac (réécrite sur T^*M) :

$$\operatorname{indice}(P)(\exp X) = \int_{T^*M} \operatorname{ch}(\mathbb{A})(X)\hat{A}(T^*M)(X).$$

Simplement cette formule n'a plus de sens point par point si P n'est pas elliptique car alors la forme $\operatorname{ch}(\mathbb{A})(X)$ n'est pas décroissante à l'infini sur la variété non compacte T^*M. C'est simplement après intégration contre une fonction test sur $\mathfrak{g}$ que la formule prend un sens. Nous démontrons similairement une formule pour $\operatorname{indice}(P)(s \exp X)$

comme intégrale sur $T^*M(s)$. Autrement dit, dans le formalisme des bouquets de formes équivariantes et de la nouvelle formule universelle (5), on peut donner une formule pour l'indice d'un opérateur G-transversalement elliptique qui est une extension naturelle de la formule de l'indice délocalisée. Ce travail est présenté dans [50] et [51]. L'article [42] montrait antérieurement que cette formule était valable dans un cas très particulier, mais convaincant et amusant, d'opérateur transversalement elliptique : l'opérateur identiquement nul sur un espace homogène. Enfin l'article [41] compare différentes constructions du caractère de Chern d'un fibré différence sur une variété non compacte. Ceci permet en particulier de remarquer que notre formule pour les opérateurs transversalement elliptiques donnée en termes de superconnexion coïncide bien pour les opérateurs elliptiques avec la formule d'Atiyah-Segal-Singer.

Il me semble que les opérateurs transversalement elliptiques sont très utiles pour localiser les problèmes d'indices d'opérateurs elliptiques lorsqu'on possède un groupe de symétrie. Mon étudiant Paul-Emile Paradan a eu l'idée d'utiliser des applications moment abstraites pour déformer un symbole elliptique, le localiser et étudier l'indice équivariant géométriquement.

Les opérateurs transversalement elliptiques sont indispensables pour généraliser le théorème de Riemann-Roch dans le cadre des V-variétés, comme d'ailleurs l'avait déjà montré Atiyah. Une V-variété n'est pas lisse , mais n'a que des singularités de type quotient par l'action d'un groupe fini. Elles sont incontournables dans la théorie de la réduction symplectique. Si M est une V-variété de dimension paire, on peut alors définir ce qu'est un opérateur de Dirac twisté et, grâce aux formules d'indice d'opérateurs transversalement elliptiques, on peut calculer son indice. C'est l'objet de l'article [47]. Il permet en particulier de définir le nombre de Riemann-Roch $Q(M)$ d'une V-variété symplectique quantifiable M et d'en donner une formule intégrale en fonction de classes $\hat{A}$ et de classes d'Euler d'une stratification de M . Ceci généralise des formules d'Atiyah et de Kawasaki. C'est le théorème de Riemann-Roch-Kawasaki dans le cadre des V-variétés différentiables (non nécessairement algébriques).

Quantification géométrique et polyèdres convexes. On se donne une action du groupe S^1 sur une variété symplectique compacte (M, σ) de dimension $2n$ et munie d'un fibré en lignes $\mathcal{L}$ de courbure $i\sigma$. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ la fonction hamiltonienne correspondant au champ de vecteurs périodique X. Soit a une valeur régulière de f. On peut alors considérer la variété symplectique réduite $M_{red}(a) = f^{-1}(a)/S^1$ de dimension réduite $2(n-1)$. Elle n'est en général qu'une V-variété car l'action de S^1 dans $f^{-1}(a)$ peut avoir des stabilisateurs finis. Dans la représentation quantifiée $Q(M)$, le spectre de l'opérateur iX doit pouvoir être lu sur la fonction f. Les niveaux d'énergie de X, c'est-à-dire les valeurs propres de iX doivent être des valeurs entières de f. De plus, la multiplicité de la valeur propre n doit être en rapport avec l'espace réduit $M_{red}(n)$. C'est le credo de la mécanique quantique.

Plus généralement, à une variété symplectique (M, σ) munie d'une action hamiltonienne d'un groupe G, on associe une variété symplectique stratifiée $M//G$. Ce quotient n'est une variété lisse que dans les très bons cas. On a ainsi réduit le nombre de variables : $\dim M//G = \dim M - 2\dim G$ et on dit que $M//G$ est la variété réduite en 0. Victor Guillemin et Shlomo Sternberg conjecturèrent que la dimension de l'espace $Q(M)^G$ des invariants de la représentation $Q(M)$ est égal au nombre de Riemann-Roch de la variété symplectique stratifiée quantifiable $M//G$. Lorsque la variété M est une variété projective muni de son fibré en lignes tautologique $\mathcal{L}$, l'espace $M//G$ est une variété algébrique, l'espace $Q(M)$ est l'espace des sections holomorphes de ce fibré $\mathcal{L}$ et la conjecture de Guillemin-Sternberg résulte de la théorie géométrique des invariants de Mumford et Kirwan. On voit que l'identité $Q(M)^G = Q(M//G)$ serait un analogue C^∞ de la théorie géométrique des invariants.

On sait que beaucoup d'espaces de modules apparaissent comme espaces "réduits". Par définition même, l'espace $M//G$ n'a plus d'action de G, puisqu'on a "réduit" par G. Cependant Witten suggère que pour calculer la cohomologie ordinaire de $M//G$, il vaut mieux "déréduire". F. Kirwan avait montré précédemment l'existence d'une application surjective $\mathcal{H}_G(M) \to H^*(M//G)$. Witten écrit la formule

$$\int_{M//G} \alpha_{red} = \int \int_{M \times \mathfrak{g}} \alpha(X) dX$$

qui relie l'intégrale de certaines formes équivariantes fermées $\alpha(X)$ à l'intégrale de la forme α_{red} sur $M//G$ associée à $\alpha(X)$ par F. Kirwan. C'est ainsi que grâce à la formule de localisation abélienne [29], des nombres caractéristiques de variétés réduites peuvent se calculer explicitement en fonction des points fixes de G dans M.

En élaborant cette idée de Witten, je démontre ([48]) la conjecture de Guillemin-Sternberg dans le cas de S^1 , puis dans le cas d'un tore ([49]). On sait d'après Duistermaat-Heckman que la mesure image par l'application moment $f : M \to \mathfrak{g}^*$ est une fonction localement polynomiale calculable en fonction de la courbure de la fibration $f^{-1}(a) \to M_{red}(a)$. Ceci se voit aussi simplement en reprenant la méthode de L. Jeffrey et F. Kirwan ([46]). Je montre que des mesures similaires obtenues en appliquant des opérateurs différentiels à cette fonction localement polynomiale prennent des valeurs entières aux points entiers de l'image de f et que ces valeurs sont les nombres de Riemann-Roch des fibres

$f^{-1}(n)/G$. Le travail de Witten sur la localisation non-abélienne a suscité de nombreux travaux. Ainsi Meinrenken, puis Meinrenken-Sjamaar montreront la conjecture de Guillemin-Sternberg : la quantification commute à la réduction, dans un cadre symplectique. Grâce à ses nouvelles méthodes de localisation, Paul-Emile Paradan étend le cadre de ces travaux et donne des conditions pour que la quantification commute à la réduction, pour une application moment abstraite.

Il m'était clair qu'une belle formule pour le nombre de points entiers dans un polyèdre convexe entier $P \subset \mathbb{R}^n$ pouvait s'obtenir comme corollaire de la formule de Riemann-Roch-Kawasaki pour le nombre $Q(M)$ d'une V-variété symplectique quantifiable. Cette formule donne le nombre de points entiers dans P en fonction du volume d'un polytope déformé $P(h)$. (Bien entendu, comme cette formule généralise les formules sommatoires d'Euler-MacLaurin et de Khovanskii-Pukhlikov, elle fait intervenir un opérateur différentiel d'ordre infini associé à la fonction $x/sh(x)$. Des sommes sur des groupes finis associés aux sommets du polytope font apparaître des expressions arithmétiques, en particulier des sommes de Dedekind.) En effet, si P est simple, c'est-à-dire si les faces de P s'intersectent génériquement, il existe une variété projective M de dimension complexe n à singularités quotients pour laquelle l'espace $Q(M)$ admet une base indexée par les points de $\mathbb{Z}^n$ contenus dans le polytope P. Toutefois, il me semblait extravagant d'utiliser l'arsenal de la théorie de l'indice sur des V-variétés pour un problème dont l'énoncé est élémentaire. Avec l'aide de M. Brion, j'ai pu donner une démonstration tout-à-fait élémentaire, basée sur l'identité d'Euler, de cette belle formule ([52]) tout d'abord pour les polytopes entiers simples. D'autre part, nous avons montré dans [55] que le calcul de l'indice équivariant pour des variétés à singularités de type quotient se simplifiait beaucoup dans le cadre de variétés toriques. Puis, en utilisant des outils élémentaires de géométrie convexe, nous avons donné une formule sommatoire d' Euler-MacLaurin pour les fonctions de partition et pour les polytopes convexes rationnels quelconques ([54]). Remarquons qu'un cas particulier de ce théorème est déjà très instructif. Il s'agit de chercher le nombre de solutions en entiers positifs d'une équation linéaire à coefficients entiers positifs, par exemple de calculer , en fonction de n, le nombre de solutions de l'équation $6x+10y+15z=n$ avec x, y, z entiers positifs. Nous donnons une formule remarquablement simple pour ces fonctions de l'entier n, dites fonctions de partitions. Là encore, bien que la solution nous fût suggérée par des mathématiques sophistiquées, notre méthode est très élémentaire. Ainsi, il me semble assez remarquable qu'il m'ait fallu tant de détours pour apporter une idée tout compte fait très "bête" et très naturelle à ce sujet. Cela me rend à la fois contente et soucieuse. Peut-être suis-je en effet restée sans voir la plupart des choses limpides qui m'entourent.

LISTE DES PUBLICATIONS

ARTICLES

[1] Réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. C.R.A.S., vol. 263 (1966), p. 4 - 6.

[2] Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie (avec M. Duflo). C.R.A.S., vol. 268 (1969), p. 583-585.

[3] Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes : Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. Soc. Math. France, vol. 98 (1970), p. 81-116.

[4] Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel. Ann.Sci. ENS, vol. 3, (1970), p.353-384.

[5] Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble. C.R.A.S., vol 270 (1970), p. 173-175 et p. 704-707.

[6] Sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle. C.R.A.S., vol 270 (1970), p. 1405-1407.

[7] Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie résolubles (avec N. Conze). C.R.A.S., vol 272, (1971), p. 985-988.

[8] La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente. Bull. Soc. Math. France, vol. 100 (1972) p. 301-335.

[9] Existence de polarisations positives dans les algèbres de Lie (avec J.Wolf). C.R.A.S., vol. 274 (1972), p. 299-302.

[10] Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions, and the application to the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group (avec H. Rossi). J. Func. Anal., vol.13, (1973), p.324-389.

[11] Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie (avec R. Rentschler). Ann.Sci. ENS, vol. 6, (1973), p.389-405.

[12] Sur la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie (avec J. Dixmier et M. Duflo). Compos. Math., vol. 29, (1974), p.309-323.

[13] Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi-simple Lie group (avec H. Rossi). Acta Math., vol. 136, (1976), p. 1-59.

[14] Équations de Cauchy-Riemann tangentielles associées à un domaine de Siegel (avec H. Rossi). Ann.Sci. ENS, vol. 9 (1976), p. 31-80

[15] Group representations on Hilbert spaces defined in terms of $\overline{\partial}_b$-cohomology on the Silov boundary of a Siegel Domain (avec H. Rossi). Pac. J. Math., vol.65 (1976), p. 193-207.

[16] Remarque sur la covariance de certains opérateurs différentiels (avec M. Kashiwara). Dans :"Non-Commutative Harmonic Analysis", (Actes colloq., Marseille Luminy 1976) p. 119-137. Lecture Notes in Mathematics, 587 - Springer, Berlin, 1977.

[17] Wave and Dirac operators and representations of the conformal group (avec H.P. Jakobsen). J. Func. Anal., vol. 24 (1977), p. 52-106.

[18] Groupe symplectique et seconde quantification. C.R.A.S., vol. 285, (1977), p. 191-194.
[19] On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials (avec M. Kashiwara). Invent. Math., vol. 44, (1978), p. 1-47.
[20] The Campbell-Hausdorff formula and invariant distributions (avec M. Kashiwara). Invent. Math., vol 47, (1978), p. 249-272.
[21] Symmetry and causality properties of physical fields (avec H.P. Jakobsen, B. Oersted, I.E. Segal, B. Speh). Proc. Nat. Acad. Sci, USA, vol 75, (avril 1978) p. 1609-1611.
[22] Functions of the Shilov boundary (avec M. Kashiwara). Dans : "Non-Commutative Harmonic Analysis", (Actes colloq. Marseille Luminy 1978) p. 136-176. Lecture Notes in Mathematics, vol. 728 - Springer, Berlin, (1979).
[23] K-types and singular spectrum (avec M. Kashiwara). Dans : "Non-Commutative Harmonic Analysis", (Actes colloq. Marseille Luminy 1978) p. 177-200. Lecture Notes in Mathematics, vol.728 - Springer, Berlin, (1979).
[24] On Rossmann's formula for characters of discrete series. Invent. Math., vol.54, (1979), p. 11-14.
[25] Restrictions and expansions of holomorphic representations (avec H.P. Jakobsen). J. Func. Anal., vol. 34 (1979), p. 29-53.
[26] Équations de Hua et integrales de Poisson (avec Nicole Berline). Dans : "Non-Commutative Harmonic Analysis", (Actes colloq. Marseille Luminy 1980) p. 1-51. Lecture Notes in Mathematics, vol. 880 - Springer, Berlin, New-York (1981).
[27] A Poisson-Plancherel formula for semi-simple Lie groups. Annals of Math., vol. 115, (1982), p.639-666.
[28] Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation (avec Nicole Berline). Dans : "Representation theory of reductive groups", (Actes colloq. Park City, Utah, avril 1982), p. 53-67 Prog. in Math., Birkaüser Boston, Boston, (1983).
[29] Classes caractéristiques équivariantes. Formules de localisation en cohomologie équivariante (avec Nicole Berline). C.R.A.S., vol. 295, (1982),p. 539-541.
[30] Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes (avec Nicole Berline). Duke. Math. Journal, vol. 50 (1983), p. 539-549.
[31] Projections d'orbites, formule de Kirillov, et formule de Blattner (avec M. Duflo et G. Heckman). Dans : "Analyse Harmonique sur les groupes de Lie et les espaces symétriques" (Actes colloq. Kleebach, mai 1983), p. 65-128. Mémoires de la SMF (1984).
[32]The equivariant index and Kirillov's character formula (avec Nicole Berline). Amer. Journ. of Math., vol. 107, (1985) p. 1159-1190.
[33] Harmonically induced representations of solvable Lie groups (avec J. Rosenberg). J. Func. Anal., vol. 62, (1985) p. 8-37.

[34] A computation of the equivariant index of the Dirac operator (avec Nicole Berline). Bull. Soc. Math. France, vol. 113, (1985), p.305-345.
[35] Recurrence relations for Plancherel functions (avec D.Peterson). Dans : "Non-Commutative Harmonic Analysis", (Actes colloq. Marseille Luminy 1985) p. 240-261. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1243 - Springer, Berlin, New-York (1987).
[36] La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels (avec M. Duflo). Dans : "Representations of Lie groups", (Actes colloq. Kyoto, Hiroshima, 1986), p. 289-336 Advances Studies in Pure Mathematics, vol. 14. Academic Press Boston, (1988).
[37] A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators (avec Nicole Berline). Topology, vol. 26, (1987), p. 435-463.
[38] Sur le foncteur de Zuckerman (avec M. Duflo). C.R.A.S., vol. 304, (1987), p.467-469.
[39] Orbites coadjointes et cohomologie équivariante (avec M. Duflo). Dans : "The Orbit Method in Representation Theory", (Actes colloq. Copenhagen 1988), p. 11-60. Prog. in Math., vol. 82, Birkhaüser Boston, Boston, (1990).
[40] Polynômes de Joseph et Représentation de Springer. Ann. Sci. E.N.S., vol. 23, (1990), p.453-562.
[41] The equivariant Chern character and index of G-invariant operators (avec Nicole Berline). Dans : "D-modules, Representation theory and Quantum groups" (Actes colloq. CIME, Venise, 1992), p. 157-200. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1565, Springer, Berlin, New-York (1993).
[42] Indice équivariant et caractère d'une représentation induite (avec Nicole Berline). Dans "D-modules and Microlocal Geometry", (Actes colloq. Lisbonne 1990), p. 173-186. Walter de Gruyter, Berlin, New-York, (1992).
[43] Un théorème d'unicité pour les familles cohérentes sur les groupes de Lie semi-simples (avec M. Duflo). Dans : "Lie Theory and Geometry in honor of B. Kostant", (Actes Colloq. MIT, Cambridge 1993), p. 167-215. Prog. in Math., Boston, Basel, Berlin, (1994).
[44] Geometric quantization and equivariant cohomology. Dans : "First European Congress of Mathematics, vol.1 (Actes Congrès Paris 1992), p. 249-295. Prog. in Math., Birkhaüser Verlag, Basel, Boston, Berlin (1994).
[45] Instantons et correspondance de Kostant-Sekiguchi. C.R.A.S., vol. 320, (1995), p. 901-906.
[46] A note on Jeffrey-Kirwan-Witten localisation formula. Topology , vol. 35, (1996), p. 243-266.
[47] Equivariant index formulas for orbifolds. Duke Math. Journal, vol 82, (1996), p. 637-652.
[48] Multiplicities formulas for geometric quantization, part I. Duke Math. Journal, vol 82, (1996), p. 143-179.

[49] Multiplicities formulas for geometric quantization, part II. Duke Math. Journal vol 82, (1996), p. 181-194.
[50] The Chern character of a transversally elliptic symbol (avec Nicole Berline). Invent. Math. , vol 124, (1996), p. 11-49.
[51] L'indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques (avec Nicole Berline). Invent. Math. ,vol 124, (1996), p. 51-101.
[52] Lattice points in convex polytopes (avec Michel Brion). Journal of the American Mathematical Society , vol 10, (1997), p. 371-392.
[53] Quantization of algebraic cones and Vogan's conjecture. Pacific Journal of Mathematics, vol 182, (1998), p.113-135.
[54] Residues formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes (avec Michel Brion). Journal of the American Mathematical Society, vol 10, (1997), p. 797-833.
[55] An equivariant Riemann-Roch theorem for complete, simplicial toric varieties (avec Michel Brion). J. reine angew. Math., vol 482, (1997), p. 67-92.
[56] On the localization theorem in equivariant cohomology (avec Michel Brion). dg-ga/9711003
[57] Arrangement of hyperplanes I : Rational functions and Jeffrey-Kirwan residue (avec Michel Brion). Ann. scient. Éc. Norm. Sup., vol 32, (1999), p. 715-741.
[58] Arrangement of hyperplanes II : The Szenes formula and Eisenstein series (avec Michel Brion). Duke Mathematical Journal (1999).
[59] Le centre de l'algèbre enveloppante et la formule de Campbell-Haussdorff. C. R. Acad. Sci. Paris, vol 329, (1999) p. 667-772.
[60] Residues formulae for volumes and Ehrhart polynomials of convex polytopes. (avec V. Baldoni-Silva) – (arXiv :math.CO/0103097). Cet article de 83 pages est une version préliminaire d'un monographe sur les méthodes de calculs par résidus des volumes de polytopes convexes et leur nombre de points entiers. Il contient des résultats nouveaux sur le calcul des point entiers dans les polytopes, résultats implémentés dans l'article [63].
[61] Residue formulae for vector partitions and Euler-MacLaurin sums. (avec András Szenes) (paru dans Proceedings of FPSAC-01 : Advances in Applied Mathematics, 30 (2003), p. 295-342. (arkiv :mathCO/0202253).
[62] Morris identities and the total residue for a system of type A_n (avec V. Baldoni-Silva). Non Commutative Harmonic Analysis in honor of Jacques Carmona. pp 1-19, vol 220, Progress in mathematics. Birkhauser-Boston, Boston MA 2004.
[63] Counting Integer Flows in Networks. (avec V. Baldoni-Silva et Jesus de Loera). Foundations of Computational Mathematics 4 (2004) 277-314.(arkiv mathCO/0303228)
[64] Toric reduction and a conjecture of Batyrev-Materov. (avec Andras Szenes). Inventiones Mathematicae ,158, 2004, 453-495 (arkiv mathAT/0306311)

[65] Mixed toric residues and tropical degenerations (avec Andras Seznes) (arkiv mathAG/0410064) soumis

LIVRES OU MONOGRAPHES

[L.1] Représentations des groupes de Lies résolubles (avec P. Bernat, N. Conze, M. Duflo,M. Lévy-Nahas, M. Raïs, P. Renouard). "Monographies de la Société Mathématique de France", 4, (chapitre 4 et chapitre 6), (chapitre 8, avec P. Bernat). Dunod, Paris (1972).

[L.2] The Weil representation, Maslov index and theta series (avec G. Lion). Progress in Mathematics, Birkhaüser, Basel, Boston, Stuttgart (1980). Traduit en russe par M.I.R. (1982).

[L.3] Heat kernels and Dirac operators (avec N. Berline, E. Getzler). Collection Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 298, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, (1991).

La troisième édition est parue dans la collection : Grundlehren Text editions de Springer.

[L.4] Sur la cohomologie équivariante des variétés différentiables (avec M. Duflo, S. Kumar). Astérisque, vol. 215, S.M.F., Paris, (1993). Cette monographie est une réunion de deux articles de recherche :

M. Duflo et M. Vergne : "Cohomologie équivariante et descente".

S. Kumar et M. Vergne : "Equivariant cohomology with generalized coefficients".

THÈSE

- Variété des algèbres de Lie nilpotentes. Texte ronéotypé, Faculté des Sciences, Paris 1966.

ANNONCES DE RECHERCHE

- Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes : Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. C.R.A.S., vol. 267, (1968), p. 867-870. (Annonce de [3]).
- La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente. C.R.A.S., vol. 269, (1969), p. 950-952. (Annonce de [8]).
- Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel. C.R.A.S., vol. 270, (1970), p. 1405-1407. (Annonce de [4]).
- Fonctions holomorphes de carré sommable sur un domaine de Siegel et étude de la série discrète holomorphe (avec H. Rossi). C.R.A.S., vol. 275, (1972), p. 17-20. (Annonce de [10]).
- Équations de Hua et intégrales de Poisson (avec N. Berline). C.R.A.S., vol. 290, (1980), p. 123-125. (Annonce de [26]).
- Un calcul de l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac par la méthode de la chaleur. (avec N. Berline). C.R.A.S., vol. 299, (1984), p. 511-514. (Annonce de [34]).
- Sur l'indice des opérateurs transversalement elliptiques. C.R.A.S., vol. 310, (1990), p. 329-332. (Annonce de [50], [51]).
- Un théorème d'unicité pour les familles cohérentes sur les groupes de Lie semi-simples (avec M.Duflo). C.R.A.S. , vol. 317, (1993), p. 1001-1006. (Annonce de [43]).
- Cohomologie équivariante et descente I, II (avec M. Duflo). C.R.A.S., vol. 316, (1993), p. 971-976, (1993), p. 1143-1148. (Annonce de [L.4], Chapitre 1).
- Quantification géométrique et multiplicités. C.R.A.S., vol. 319, (1994), p. 327-332, (Annonce de [48], [49]).
- Une formule d'Euler-MacLaurin pour les fonctions de partitions. C. R. A. S., vol 322, (1996), p. 217-220, (Annonce de [54]).
- Une formule d'Euler-MacLaurin pour les polytopes convexes rationnels. C. R. A. S., vol 322, (1996), p. 317-320, (Annonce de [54]).

ACTES DE CONFÉRENCES ET DE COLLOQUES

- Sur les intégrales d'entrelacement de R.A. Kunze et E.M. Stein, d'après G. Schiffman. Dans "Séminaire Bourbaki", 1969 Lecture Notes in Math., vol. 431, Springer, Berlin, p. 87-106.
- Study of some holomorphically induced representations of solvable groups and restriction of the holomorphie discrete series of a semi-simple group G to the minimal parabolic of G. Dans : "Harmonic analysis on homogeneous spaces", (American Mathematical Society Summer Institute,

Williamstown, Massachussetts, USA, 1972.), p. 255-262 Proc. Symp. Math., vol 26, Amer. Math. Soc., Providence, (1973).
- Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles. Dans "Séminaire Bourbaki", 1973/1974. Lecture Notes in Math., vol. 431, exposé 447, Springer, Berlin, (1975), p.205- 226
- Continuation analytique de la série discrète holomorphe (avec H. Rossi). Dans :"Non-Commutative Harmonic Analysis", (Actes colloq. Marseille Luminy 1974) p. 198-225. Lecture Notes in Math, vol 466, Springer, Berlin, (1975).
- Tangential Cauchy-Riemann equations associated with a Siegel domain. Dans : "Several complex variables", (American Mathematical Society Summer Institute, Williamstown, 1975) p. 303-308 Proc. Symp. Math., vol 30, Amer. Math. Soc., Providence, (1977).
- A Plancherel formula without group representations. Dans : "Operator algebras and group representations, vol 2" (Actes colloq. Neptune 980, 1984), p. 217-226 Pitman, Boston, M.A-Londres, (1984)
- Representations of Lie groups and the Orbit Method. Dans : "Emmy Noether, 100th birthday", (Acte Colloq. Bryn Mawr, 1982), p. 59-101, Springer, New-York, Berlin, (1983).
- Formule de Kirillov et indice de l'opérateur de Dirac. Dans : "Proceedings of the International Congress of Mathematicians", Warszawa, 1983, p. 921-934, North Holland, Amsterdam, New-York, Oxford, 1984.
- Orbites coadjointes et caractères. Dans : " Symplectic geometry and Mathematical Physics", (Actes colloq. en l'honneur de Jean Marie Souriau, Aix en Provence, 1990), p. 442-445. Prog. in Math., Birkaüser-Boston, Boston, (1991).
- Universal formula for characters. Open problems in Representation theory of Lie groups (avec Nicole Berline). Dans : "Analysis on homogeneous spaces". Taniguchi Foundation, Japon, 1986.
- Convex polytopes and quantization of symplectic manifolds. NAS Colloquium on Symmetries throughout the sciences, Proceedings of the National Academy of Sciences, vol 93, (1996), p. 14238-14242.
- Quantification géométrique et réduction symplectique. Seminaire Bourbaki, Paris, mars 2001.
-Residue formulae for Verlinde sums, and for number of integral points in convex rational polytopes. Proceedings of the Tenth General Meeting of the European Women in Mathematics. Malta August 2001. p. 223-285, World Scientific Publishing Company, (2003), New-Jersey, London, Singapore, Hong-Kong.

RÉDACTION DE COURS

Cohomologie équivariante. Notes du cours d'été CIMPA de Kenitra 1999, rédigées par Sylvie Paycha.

Séminaires et Congrès, vol 7. Société Mathématique de France 2003. pages 1-43.

Disponible sur page personelle. http ://math.polytechnique.fr/cmat/vergne/

ÉCRITS DIVERS

-Rapport de voyage 1966-1967. Fondation Singer-Polignac.

-"Students in France". Article dans " Mother Functor". Journal du département de Mathématiques de l'université de Berkeley, numéro 5, Décembre 1971.

-" Devenir Mathématicienne". Intervention au séminaire Samuel : "Mathématiques, Mathématiciens et Société" : Séminaire publié par l' UER de Mathématiques, Orsay, 1975. Publié aussi dans Impascience, numéro 2, 1975.

-Contribution à l'article in memoriam Lajos Pukánsky. Notices of the American Mathematical Society, vol 45, (1998), p. 493-495.

- Discours de réception à l'Académie des Sciences. Juin 1999. Discours et Notices biographiques. Tome 1- 1997-1998, Académie des Sciences. Paris.

-Contribution à l'article in memoriam Irving Ezra Segal. Notices of the American Mathematical Society, vol 46, (1999), p. 666-667.

-"Profession : chercheur en Mathématiques". Texte d'une conférence au lycée de L'Isle-Adam, Mai 1999. Disponible sur page personelle. Paru dans la revue Alliage/ Seuil 2000.

-Contribution au numéro spécial en l'honneur d'Irving Ezra Segal. "Some Comments on the Work of I.E. Segal on Group Representations." Journal of Functional Analysis, vol 190, 2002

Adresse
Michèle Vergne
Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique.
91128. Palaiseau Cedex

Tel : 69 33 43 83
Fax : 69 33 30 19

E-mail :vergne@math.polytechnique.fr

Page personelle, http ://math.polytechnique.fr/cmat/vergne/