



INSTITUT DE FRANCE  
Académie des sciences

Royaume du Maroc



Académie Hassan II

## MADEV 17

Rabat, Maroc, 16-19 octobre 2017

### Posters de la session *Mathématiques appliquées à la production, la dynamique et la diversité des peuplements végétaux*

M. Messaoudi, F. Naciri, M. Tlidi, M. Clerc, D. Escaff, M. Khaffou & A. Makhoute - *Modélisation de l'émergence des motifs de végétation spatiale périodique en milieu aride.*

F. Naciri, M. Messaoudi, M. Khaffou, M. Tlidi, & A. Makhoute - *Modélisation des structures de végétation auto-organisées en milieu aride.*



**Résumé :** Dans ce travail, nous modélisons la dynamique spatio-temporelle des communautés de végétation. Nous interprétons la formation des profils de végétation à une instabilité spatiale d'origine intrinsèque. Le processus d'auto-réplication peut être considéré comme un mécanisme pour repeupler les paysages arides et semi-arides, il est considéré comme un indicateur pour la récupération des écosystèmes. Nous prédisons théoriquement que le diamètre d'un seul fragment augmente au fil du temps jusqu'à ce qu'il atteigne une taille critique sur laquelle le phénomène d'auto-réplication prend place, menant à la formation de deux nouveaux correctifs circulaires indépendants. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que le système atteigne un modèle de végétation auto-organisé.

**Mots clés :** végétations, périodiques, arides et semi-arides, auto-organisation, modèle intégrodifférentiel, et auto-réplication.

### Introduction

Les changements spontanés des couvertures de végétation observée dans des écosystèmes fragmentée, constituée par une distribution spatiale périodique des trous, ou des patchs est une caractéristique des paysages arides et semi-arides. Ce processus se produit dans des ressources limitées. Il est maintenant largement admis que les interactions de facilitation et de compétition entre les plantes individuelles sont responsables de la formation de modèles de végétation périodiques [1, 2]. Il est alors important d'avoir une compréhension rigoureuse (modèles) permettant d'interpréter les changements dans les paysages à motifs.

Ce travail nous permettra au premier temps d'effectuer une analyse théorique près du point critique associé à la bistabilité, conduisant à un modèle différentiel aux dérivées partielles. Nous considérons un modèle intégrodifférentiel complet qui prend en compte les interactions de facilitation et de compétition des plantes. Ensuite nous examinons le phénomène d'auto-réplication conduisant à une transition vers des états de végétation périodique de biomasse plus élevés [3].



Figure 1 : Végétation Alfa à la région de Missour

### Matériel et méthodes

La modélisation des écosystèmes est un problème difficile et complexe. Nous adoptons l'approche de la théorie des champs moyens établie par Lefever et collaborateur. Cette théorie intègre les interactions de facilitation et compétition entre les plantes [1, 2]. En l'absence de ces interactions, le modèle résultant est similaire à l'équation logistique paradigmatique introduite par Verhulst (1845) pour étudier la dynamique de population. Dans ce qui suit, nous considérons une seule communauté végétale spécifique installée sur un paysage plat dans des conditions environnementales isotropes.

La variable d'état est la densité de végétation qui est définie au niveau de la plante. Introduisons la biomasse,  $b(r, t)$ , qui satisfait à l'évolution dynamique suivante [3].

$$\partial_t b(r, t) = b(r, t) [1 - b(r, t)] M_f(r, t) - \mu b(r, t) M_c(r, t) + D M_d(r, t).$$

L'interaction de facilitation, compétition et dispersion sont considérées comme étant de la forme

$$M_f(r, t) = \exp(X_f b),$$

$$M_c(r, t) = \exp\left(\frac{X_c}{N_c} \int e^{-\frac{|r'|}{\sigma}} b(|r+r'|, t) dr'\right)$$

et  $M_d(r, t) = D \nabla^2 b(r, t)$

Cela peut être obtenu en considérant une petite plage de dispersion et une simple expansion de Taylor, ce qui conduit à

$$D = \delta \frac{L_d^4}{4}$$

et  $N_c = 2\pi\sigma^2$

où  $X_c$  et  $X_f$  sont respectivement la force de l'interaction facilitatrice et concurrentielle. Et les paramètres  $L_d$  et  $\delta$  sont respectivement la gamme de dispersion des graines et la résistance au processus dispersif.

Les états stationnaires homogènes de la première équation, décrivant des couvertures uniformes de végétation, sont  $b_0=0$  et  $b_s$ , donné par la solution de

$$\mu = (1 - b_s) \exp(\Lambda b_s).$$

Le nombre d'onde critique au début de l'instabilité est donné explicitement par

$$K_{TP}^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{X_c b_{TP} (1 - b_{TP}) e^{X_f b_{TP}} \sigma^2}{2D} - 1 \right].$$

### Résultats et observations numériques

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire sont résumés à la figure 1. À mesure que le niveau d'aridité  $\mu$  augmente, la végétation évolue vers l'extinction. Pour  $0 < \Lambda \leq 1$ , la diminution de la densité de phytomasse est monotone. La densité d'état s'annule au point de commutation  $\mu = 1$ . Dans la plage  $b_{TP1} < b < b_{TP2}$ , l'état phytomasse uniforme est instable. Les niveaux correspondants de l'aridité  $\mu_{TP}$  sont obtenus à partir des états stables homogènes présentés dans la sous section précédente.

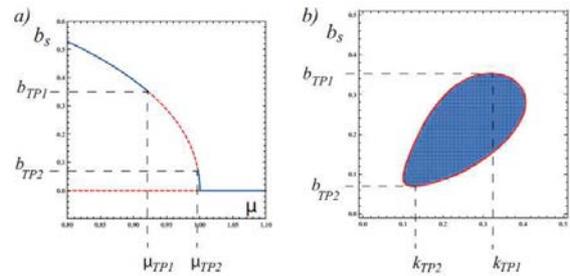


Figure 2:(a) Les distributions stationnaires uniformes de la biomasse  $b_s$  en fonction du paramètre d'aridité  $\mu$ . Les états stables sont indiqués par une ligne continue, et les états instables sont représentés par des lignes pointillées. (b) La courbe de stabilité marginale dans le plan  $(b_s, k)$ , le domaine d'instabilité est représenté par une zone ombrée bleue délimitée par une ligne continue rouge. Les paramètres sont  $X_f=2$ ,  $X_c=1$ ,  $\sigma=4$  et  $D=1$ .

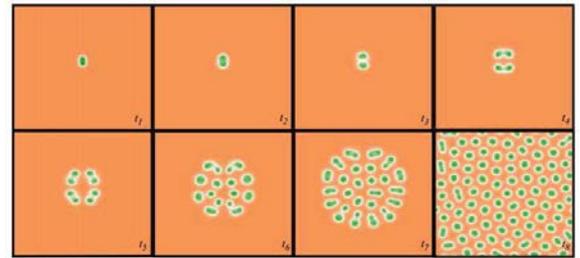


Figure 3: Auto-réplication d'une parcelle de végétation localisée circulaire obtenue au cours du temps  $t_1 < t_2 < \dots < t_5 < t_6$ . Par simulation directe de l'équation de la densité, pour un système de taille  $128 \times 128$  points, et les paramètres:  $\mu = 1.02$ ,  $X_f = 2$ ,  $X_c = 1$ ,  $\sigma = 4.5$ ,  $D = 1$ ,  $dt = 0.1$  et  $dx = 1.0$ . Amplitude du bruit additif 0.1

### Conclusions

L'analyse de stabilité linéaire montre que lorsqu'on augmente le paramètre d'aridité (l'eau devient rare), la couverture uniforme homogène de la végétation présente une fragmentation qui conduit à un schéma de végétation auto-organisées. La transition d'une solution de couverture uniforme à un motif de végétation auto-organisé a lieu lorsque  $\mu > \mu_{TP1}$ . En augmentant encore le paramètre d'aridité, les simulations numériques du modèle intégrodifférentiel montrent une transition vers des taches auto-organisées de végétation.

### Bibliographie

- [1] R. Lefever, O. Lejeune, On the origin of tiger bush, Bulletin of Mathematical Biology 59 (2) (1997) 263.
- [2] O. Lejeune, M. Tlidi, A model for the explanation of vegetation stripes (tiger bush), Journal of Vegetation Science 10 (2) (1999) 201.
- [3] I. Bordeu, M.G. Clerc, P. Couteron, R. Lefever, M. Tlidi, Self-Replication of Localized Vegetation Patches in Scarce Environments. Scientific reports, 6, (2016) 33703.

### Résumé

La désertification est l'un des grands défis de l'environnement dans le monde, en particulier en Europe méridionale et en Afrique septentrionale. Ce phénomène est visible dans les pays (semi-) arides où le potentiel d'évapotranspiration dépasse sensiblement la moyenne des précipitations annuelles. Ce déficit hydrique freine le développement des plantes individuelles et au niveau communautaire, stimule des comportements de «clustering» même si la topographie est isotrope. Les zones arides occupent 5,2 milliards d'hectares, soit environ 30 % des surfaces terrestres émergées. L'hétérogénéité spatiale typique des végétations arides ou semi-arides s'explique en général par une redistribution d'eau et de nutriments à la limite du minimum nécessaire à la survie des plantes. L'étude de ces disparités spatiales pourrait à terme permettre de « diagnostiquer » un terrain aride, et par là même proposer des méthodes de reboisement adaptées.

### Introduction

La modélisation de la dynamique spatio-temporelle de la végétation est une difficulté en soi, car il n'existe pas de premiers principe de la physico-chimie qui puisse décrire l'évolution des écosystèmes végétaux, sa description requiert un effort de modélisation. Plusieurs modèles ont mis en avant l'existence possible d'un phénomène d'auto-organisation de la végétation, Nous focalisons notre analyse sur le modèle proposé par René Lefever et ses collaborateurs [1,2,3]



Figure: végétation Alfa (*stipa-tenassicima*) à la région de Missour (Enil)

### Méthodes

Le modèle issu de la théorie de champ moyen, c'est l'équation cinétique générique, qui modélise l'évolution de la densité de végétation :

• L'équation cinétique

$$\partial c(t,r) = F_1 \times F_2 - F_3 =$$

$$\left[ \int dr' \omega_1(r') f_1(c(r+r',t)) \right] \times \left[ \int dr' \omega_2(r') f_2(c(r+r',t)) \right] - \int dr' \omega_3(r') f_3(c(r+r',t))$$

avec

C représente la densité de végétation au temps t et au point r (unité kg. m<sup>-2</sup>).

F1 (Kg m<sup>-2</sup>.s<sup>-1</sup>) c'est la fonction de distribution de propagation de la végétation.

F2 (sans dimension) c'est la fonction de distribution d'inhibition.

F3 ((Kg.m<sup>-2</sup>.s<sup>-1</sup>) la fonction de distribution de mortalité.

r,r' coordonnées repérant la position de la végétation sur des territoires 2D, et ω<sub>i</sub> (i=1,2,3) (unité:m<sup>-2</sup>): fonctions poids.

• L'équation de dispersion

$$\omega_k = (1 - \rho_s)(1 + 2\Lambda\rho_s)e^{-\frac{L^2 k^2}{2}} - \rho_s(1 + \Lambda\rho_s)e^{-\frac{k^2}{2}} - \mu e^{-\frac{L^2 k^2}{2}}$$

avec ρ est la biomasse, μ est le degré d'aridité de l'environnement, et Λ quantité de ressources disponibles dans le milieu.

L le quotient de la portée de reproduction par la portée d'inhibition.

L' l'échelle spatiale des effets mortels dans la nouvelle unité d'espace.

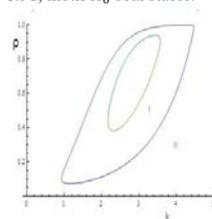
### Résultats

Après le développement de notre équation cinétique, nous avons obtenu les résultats présentés dans les figures (a), (b) et (c).

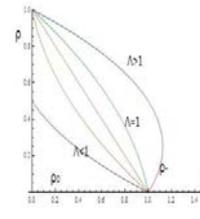
Les modes instables dans la figure (a) sont entourés par les courbes de niveau nul de la relation de dispersion ω<sub>k</sub> dans l'espace (k, ρ<sub>s</sub>). Le domaine de l'instabilité spatiale croît avec Λ, démontrant que la coopération du processus de propagation par reproduction favorise le phénomène de structuration spatiale régulière des populations de plantes.

Pour la figure (b), les états (in)stables sont représentés en traits (interrompus) continus. la distribution uniformément nulle ρ<sub>0</sub> change de stabilité au point μ = 1, au delà duquel elle devient stable. lorsque Λ ≤ 1, seul l'état ρ<sub>+</sub> est stable à valeurs positives pour 0 ≤ μ ≤ 1. Lorsque Λ > 1, le domaine d'existence de cette distribution s'étend jusqu'au point de rebroussement μ\* = 1 + (Λ-1)<sup>2</sup> / 4, ρ\* = (Λ-1)/2. Le phénomène de bistabilité dans l'intervalle 1 < μ < μ\* est caractérisé par la coexistence de deux états stables, ρ<sub>0</sub> et ρ<sub>+</sub>, séparé par un état intermédiaire instable ρ.

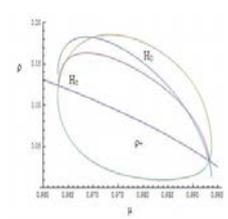
Pour (c), les solutions (in)stables apparaissent en traits (interrompus) continus. Pour chaque symétrie spatiale, la courbe (inférieure) supérieure donne les (minima) maxima de la densité. dans un domaine sous-critique caractérisé par μ < μ<sub>c</sub>, l'état ρ<sub>+</sub> coexiste de manière stable avec les hexagones H<sub>π</sub>. Dans le domaine super-critique μ<sub>c</sub> < μ < μ'<sub>c</sub> où ρ<sub>+</sub> est instable, les hexagones H<sub>π</sub> se déstabilisent au profit des bandes B qui à leur tour deviennent instables pour laisser place aux hexagones H<sub>0</sub>. Dans un autre domaine sous-critique caractérisé par μ<sub>c</sub> < μ, l'état ρ<sub>+</sub> coexiste de manière stable avec les hexagones H<sub>0</sub>. Le calcul analytique de la sélection non-linéaire de la symétrie spatiale est en accord avec les simulations numériques rapportées dans la sous-section suivante: μ=0.965, motif H<sub>π</sub> seul stable; μ=0.97, motif B seul stable; μ=0.98, motif H<sub>0</sub> seul stable.



(a) Les intervalles de nombres d'onde instables sont en fonction de l'état stationnaire uniforme de la densité de biomasse végétale, Λ=0.5, et Λ=1. L étant fixé à 0.2



(b) Distribution stationnaires uniformes de la végétation en fonction de l'aridité mesurée par μ



(c) Etats stationnaires des équations d'amplitude en fonction de μ pour Λ= 0.825, et L= 0.1.

### Conclusion

L'étude que nous avons effectuée nous a mené aux résultats suivants

- ❖ Le mécanisme de formation des distributions spatialement périodique de la végétation implique une instabilité briseuse de symétrie est une propriété intrinsèque de la dynamique.
- ❖ Le modèle décrit l'émergence de distribution spatiale à symétrie hexagonale ou en bandes.

Cette théorie donne une explication du fait que les motifs spatiaux réguliers de la végétation sont observés dans les régions arides et semi-arides.

### Bibliographie

- [1] R. Lefever, O. Lejeune, On the origin of tiger bush, Bulletin of Mathematical Biology 59 (2) (1997) 263.
- [2] O. Lejeune, M. Tlidi, A model for the explanation of vegetation stripes (tiger bush), Journal of Vegetation Science 10 (2) (1999) 201.
- [3] O. Lejeune, M. Tlidi, and R. Lefever, Vegetation spots and stripes: Dissipative structures in arid landscapes, International Journal of Quantum Chemistry, 98(2), (2004) 261.