

Académie des sciences

DISCOURS PRONONCÉ EN SÉANCE PUBLIQUE LE 13 JANVIER 2004 PAR GILLES PISIER EN HOMMAGE À LAURENT SCHWARTZ (5 mars 1915 – 4 juillet 2002)

Laurent Schwartz est décédé le 4 juillet 2002, à l'âge de 87 ans.

C'est avec une grande tristesse que j'ai accepté l'honneur d'évoquer ici sa vie et son œuvre.

Ma tâche sera grandement facilitée par l'existence de son autobiographie «Un mathématicien aux prises avec le siècle» [1], ainsi que par une notice mise à jour par lui-même en octobre 1980 [2]. En outre, plusieurs textes décrivant son œuvre sont parus l'année dernière dans les Notices de American Mathematical Society [3], d'autres vont paraître dans un numéro spécial de la Gazette des mathématiciens [4]. De plus, à l'anniversaire de sa mort en juillet 2003, un colloque de trois journées a été organisé à l'Ecole Polytechnique par le Centre de Mathématiques qu'il y avait fondé en 1965 et d'autres textes ont été diffusés.

Laurent Schwartz est né en 1915 dans une famille très liée aux milieux scientifiques: son oncle Robert Debré était un célèbre pédiatre, son père Anselme Schwartz était lui-même un chirurgien renommé et plusieurs de ses frères, cousins ou neveux ont d'ailleurs été distingués par notre Académie. Son grand-oncle (par alliance) Jacques Hadamard (1865-1963) était un mathématicien (et académicien) céléberrime. De plus, Laurent Schwartz a épousé une mathématicienne Marie-Hélène Lévy, fille de Paul Lévy (1886-1971) illustre probabiliste (lui aussi ancien membre de notre Académie), ils eurent deux enfants, Marc-André (mort à 28 ans) et Claudine, cette dernière ainsi que leur gendre Raoul Robert sont également mathématiciens.

Il n'est donc pas très surprenant que Schwartz commence son autobiographie par cette phrase : «Les mathématiques ont rempli ma vie». Cette phrase surprend néanmoins quand on sait qu'il a eu au moins deux autres grandes passions : le combat politique en particulier pour des causes humanitaires et aussi (c'est sans doute moins connu) la chasse aux papillons !

C'était en effet un entomologiste amateur renommé, il a légué au Muséum National d'Histoire Naturelle une collection impressionnante, une des plus importantes d'Europe : une vingtaine de milliers de spécimens, accumulés durant 44 ans, au cours de plus de trente voyages dans les tropiques, dont deux Spingidae le «Xylophanes schwartzi» (décrit par J. Haxaire en 1992) et le «Clanis schwartzi» (décrit par J.-M. Cadiou en 1993) qu'il a découverts et qui, selon l'usage, porte son nom.

Il débute dans la recherche en 1940-1942 (l'université de Strasbourg était alors réfugiée à Clermont-Ferrand) et y passe sa thèse en 1943. Après un an à Grenoble (1944-1945) il est maître de conférences à Nancy (1945-1952) puis à la faculté des sciences de Paris (1953-1959) où il est nommé professeur. Il est ensuite professeur à Paris VII et à l'Ecole Polytechnique (1959-1969), et enfin détaché à plein temps à l'Ecole Polytechnique de 1969 à 1980.

On doit signaler que Schwartz fit partie très tôt du groupe de mathématiciens connu sous le pseudonyme de Nicolas Bourbaki et qu'il fut manifestement très influencé par eux, même s'il ne

partageait pas, entre autres, leurs réticences envers le calcul des probabilités.

Son œuvre scientifique commence en analyse harmonique : sa thèse «Etude des sommes exponentielles» a longtemps fait référence (publiée en 1943, rééditée en 1959). Elle est suivie en 1947 par son impressionnante théorie des fonctions moyenne-périodiques sur laquelle l'influence de son collègue J. Delsarte (qui avait introduit ces fonctions) est manifeste. Un peu plus tard, en 1948, Schwartz découvre le premier exemple, dans le cas particulier de \mathbb{R}^n pour $n \geq 3$, d'ensemble ne possédant pas la propriété de synthèse harmonique. Le cas général (dont celui de \mathbb{R} et \mathbb{R}^2) a été résolu une dizaine d'années plus tard par Paul Malliavin. Bien que beaucoup plus simple, l'exemple de Schwartz qui a surpris ses contemporains reste une référence historique incontournable dans les manuels.

Mais s'il est célèbre c'est incontestablement pour sa théorie des distributions, qui lui a valu la médaille Fields en 1950 et une renommée internationale considérable après cela.

L'une de ses motivations était de donner un sens rigoureux à des calculs faits couramment par les physiciens (dont l'ingénieur électricien Oliver Heaviside et Paul Dirac) et justifiés physiquement et heuristiquement, mais totalement dénués de sens pour un mathématicien. Ces calculs utilisaient par exemple la «fonction Delta» de Dirac qui date de 1926 : nulle partout sur la droite réelle sauf en zéro, infinie en zéro et d'intégrale égale à 1. Aucune fonction digne de ce nom ne possède de telles propriétés. Il s'agissait donc de généraliser convenablement la notion de fonction pour donner un sens aux calculs de Dirac et Heaviside qui faisaient intervenir non seulement la «fonction Delta» mais aussi ses dérivées, ses primitives et une sorte de produit.

Après plusieurs années de réflexion, inspiré par la lecture d'un article de Choquet et Deny, Schwartz a, en une nuit de 1944, l'illumination : il voit tout à coup la notion de «fonction généralisée» qu'il appellera «distribution», qui répond à toute une série de questions et permet, en particulier, de donner un sens aux calculs de Dirac. Il s'attelle alors au travail de rédaction et construit une théorie complète, cohérente avec tous les outils d'analyse fonctionnelle nécessaires pour définir correctement les extensions des opérations naturelles sur les fonctions : dérivation, produit tensoriel, convolution, transformation de Fourier, etc.

Il publiera d'abord des résumés de sa théorie puis l'exposé complet en deux tomes parus en 1950 et 1951, qui seront réunis dans la troisième édition révisée de 1966. Le succès de cette théorie est rapide et considérable. Elle est très vite adoptée universellement et est couramment enseignée aujourd'hui dans les cours de maîtrise voire de licence. Pourtant, Schwartz écrit dans son autobiographie [1] que les réticences initiales étaient nombreuses. Il y en avait principalement deux types, écrit-il avec humour : ceux qui pensaient que la théorie était trop simple pour pouvoir vraiment être utile, et ceux qui pensaient qu'elle était beaucoup trop compliquée pour cela...

Bien entendu, d'autres travaux avant les siens avaient préfiguré cette théorie nouvelle, en particulier la notion de «dérivée faible» existait déjà dans certains travaux antérieurs de Wiener, Leray et Friedrichs ou dans ceux de Bochner, Carleman et surtout S. Sobolev dont Schwartz ne connaissait pas les travaux avant 1945. Ce dernier avait introduit de façon très conséquente une notion de fonction généralisée dès 1936 en vue d'étudier certaines équations aux dérivées partielles. Sur cette base, l'École russe revendique d'ailleurs pour Sobolev la paternité rétroactive de ce que l'on appelle couramment dans toutes les langues (sauf peut-être le russe) les «distributions de Schwartz». Les difficultés de communication Est-Ouest, la guerre et d'autres facteurs expliquent sans doute ce paradoxe : la publication de Sobolev est antérieure, mais tous les développements spectaculaires de la théorie jusqu'à aujourd'hui trouvent leur source dans la

théorie de Schwartz. L'historien Lützen qui a écrit un livre sur l'histoire des distributions résume ainsi la situation [5, p.64] : Sobolev inventa les distributions, mais la théorie des distributions fut créée par Schwartz.

Peu de théories ont eu une influence aussi large. A vrai dire, les physiciens ont pour la plupart continué à faire les calculs de Dirac-Heaviside comme précédemment sans trop s'intéresser à leur justification mathématique. En revanche, la «physique mathématique» (en particulier la théorie quantique des champs, voir par exemple [6,7]) a, bien entendu, adopté les distributions. Schwartz a d'ailleurs écrit un manuel spécialement destiné à faciliter leur diffusion, intitulé «Méthodes mathématiques pour les sciences physiques» [8] qui a été traduit en anglais, espagnol, japonais et russe. C'était à l'origine un cours de licence fameux donné par Schwartz pour mathématiciens et physiciens ensemble.

Mais c'est surtout en mathématiques pures et appliquées que les distributions ont été utilisées. Elles ont joué un rôle crucial dans le développement considérable des équations aux dérivées partielles. Par exemple, la résolution en 1952 par Malgrange et Ehrenpreis (indépendamment) des équations à coefficients constants était jugée impensable avant les distributions. Ces dernières sont utilisées couramment dans tous les travaux ultérieurs dans cette direction : principalement ceux de Lars Hörmander (médaille Fields 1962) d'abord sur l'hypoellipticité, puis plus tard (avec l'école qu'il a créée) sur les opérateurs pseudo-différentiels, les fronts d'onde et les Fourier intégraux, mais on peut citer aussi les travaux de J.-L. Lions et E. Magenes, Nirenberg, Stampacchia. Dès 1969, Schwartz organise (d'abord avec Charles Goulaouic, ensuite avec d'autres) un grand séminaire sur les équations aux dérivées partielles (EDP) qui jouit rapidement d'un prestige considérable et qui a continué chaque année jusqu'à aujourd'hui même à l'Ecole Polytechnique.

A tout le moins, les distributions ont favorisé sinon permis le très grand développement mondial actuel de ce domaine des EDP qui occupe une place essentielle dans les séminaires, colloques et publications d'analyse et auquel se rattachent au moins six Membres ou Correspondants de notre Compagnie.

Mais en fait les distributions ont aussi été appliquées dans des domaines très variés : analyse de Fourier, groupes de Lie (avec F. Bruhat et Harish-Chandra), théorie du potentiel (Brelot, Deny), semi-groupes d'évolution (J.-L. Lions, Chazarain), cohomologie et «courants» (De Rham), etc.

Les distributions ont aussi eu beaucoup de petits cousins : Théories analogues mais distinctes comme les hyperfonctions (Sato, Martineau), les ultradistributions (pour les classes de Gevrey) et d'autres.

Il est bon de souligner que la plus grande qualité de la théorie de Schwartz, outre son ampleur, c'est sans doute sa simplicité. C'est son extraordinaire limpidité qui explique son succès, mais aussi qui rend malaisé d'apprécier correctement la difficulté des problèmes qu'elle a résolus. Son oeuvre est maintenant tellement omniprésente que ses utilisateurs ne s'en rendent souvent même plus compte !

Schwartz a, bien entendu, poursuivi dans les années 1950 et 1960 l'approfondissement de sa théorie avec le très important «théorème des noyaux», et la généralisation des distributions au cas «à valeurs vectorielles».

Faisant suite aux travaux importants de George Mackey aux États-Unis, il a aussi largement développé (avec Dieudonné et au sein du groupe Bourbaki) la théorie des espaces localement convexes, étudiant en particulier les notions de limite inductive d'espaces de Fréchet (motivé par

l'espace D des fonctions infiniment différentiables à support compact) ainsi que la notion duale. Son théorème des noyaux de 1950 est à la base de la thèse phénoménale de 1953 de son élève Alexander Grothendieck sur les produits tensoriels d'espaces localement convexes et la notion d'espace nucléaire, dont l'impact considérable se fait encore sentir de nos jours.

Certains de ses résultats de l'époque, comme l'extension de la théorie de Riesz aux opérateurs compacts sur les espaces de Fréchet, sont utilisés pour la cohomologie des variétés analytiques (Cartan-Serre). Cette période «localement convexe» semble se terminer vers 1966 avec le théorème du graphe borélien (améliorant un résultat dû à Raikov) qui s'applique par exemple à l'espace D' des distributions.

Vers 1964, Schwartz se tourne vers la théorie des mesures de Radon qu'il développe sur les espaces topologiques généraux, puis graduellement vers la théorie des probabilités sur les espaces de dimension infinie (par exemple les espaces de fonctions ou de distributions). C'est vers cette époque que la notion de probabilité cylindrique (en particulier dans le cas gaussien) prend une ampleur nouvelle à la suite des travaux de nombreux auteurs d'horizons très divers : Segal, Gross, Dudley aux États-Unis, Prokhorov, Sazonov, Gelfand, Minlos en URSS, mais aussi X. Fernique (processus gaussiens) et J.-P. Kahane (séries de Fourier aléatoires) en France.

Inspiré par tous ces travaux, Schwartz développe une théorie des applications radonifiantes, c'est-à-dire des applications linéaires (entre espaces de Banach) qui transforment les probabilités cylindriques, majorées d'une certaine façon, en mesures de Radon. Si la majoration est de type L_p , on obtient les applications dites p -radonifiantes. Après des contacts avec S. Kwapien de Varsovie, Schwartz se rend compte que ses applications p -radonifiantes coïncident (au moins pour $p > 1$) avec les applications p -absolument sommantes de A. Pietsch (Jena, Allemagne de l'Est). Ces dernières remontent d'ailleurs dans certains cas particuliers à la thèse de Grothendieck des années 50. La théorie de Schwartz (en particulier son «théorème de dualité» très utile) fait très vite considérablement progresser celle initiée par Pietsch, par l'introduction de nouvelles méthodes probabilistes, comme par exemple l'utilisation systématique des lois p -stables de Paul Lévy.

Schwartz a alors organisé d'abord seul, puis avec Bernard Maurey une série impressionnante de séminaires, tous rédigés qui représentent une dizaine de volumes commençant par les applications radonifiantes mais graduellement tournés vers la géométrie et les probabilités sur les espaces de Banach avec les notions de type et de cotype, que ses travaux sur les lois stables ont fait germer et qui ont eu un grand impact.

A partir de 1980 environ, Schwartz se tourne plus que jamais vers le calcul des probabilités. Il développe une théorie très générale [9] des semi-martingales à valeurs dans les variétés. Il traite aussi des martingales conformes sur les variétés analytiques complexes.

Il s'attache tout particulièrement et c'est la nouveauté de son point de vue sur les variétés, à mettre la formule d'Ito et les équations différentielles stochastiques sous forme intrinsèque. Parmi ses prédécesseurs dans cette direction, on peut citer, outre Ito, Bismut, Dynkin, Elworthy et Malliavin. Plus tard [10], il introduit et étudie en détail une notion nouvelle intéressante : les semi-martingales «formelles», qui ont un lointain air de parenté avec les distributions, en ce sens qu'elles permettent de se libérer dans les calculs de considérations ponctuelles. Enfin, l'une de ses dernières publications en 1994 [11] combine les semi-martingales et les applications radonifiantes : il y donne une condition suffisante pour qu'un opérateur (entre espaces de Banach) transforme une semi-martingale cylindrique en une semi-martingale «vraie».

Bien qu'il n'en ait nulle part fait état lui-même, et qu'il dirait sans doute que diriger une thèse était alors plus facile, Schwartz aurait pu se vanter d'avoir une liste d'élèves à faire pâlir d'envie n'importe quel directeur de recherche actuel : A. Grothendieck (médaille Fields 1966), J.-L. Lions, B. Malgrange, A. Martineau, F. Trèves, L. Boutet de Monvel, S. Baouendi, S. Mizohata, T. Kotake, M.-S. Narasimhan, les époux Unterberger et bien d'autres.

En outre, son talent (et son goût) pour l'enseignement (à tous les niveaux) était absolument extraordinaire, et tous les témoignages de ses auditeurs convergent : il subjuguait littéralement ses étudiants. Le poète et mathématicien Jacques Roubaud a fait un magnifique portrait de Schwartz-enseignant (et aussi de son collègue Choquet) dans son livre dont le titre est «*Mathématique* :». En particulier dans le chapitre malicieusement intitulé «Le coup d'état du général Bourbaki», il relate la stupeur des étudiants devant les innovations pédagogiques spectaculaires de Schwartz, rythmées par son clignement d'yeux et son mouvement d'épaules légendaires, à l'occasion de la grande réforme de l'enseignement du calcul différentiel et intégral à l'université de Paris dans les années 1954-1956.

Il est difficile de retracer la vie de Laurent Schwartz sans parler de ses engagements politiques. Il a tout d'abord été membre d'un parti trotskiste dans sa jeunesse. Bien qu'il ne se considère plus lui-même comme trotskiste après 1947, il ne proteste pas quand ses amis disent qu'il est toujours resté un «ancien trotskiste». En tout état de cause, son ancienne appartenance à ce parti lui a valu de grandes difficultés pendant près de quarante ans pour obtenir un visa d'entrée aux Etats-Unis, et cela même en 1950 pour aller recevoir la médaille Fields au congrès mondial de Harvard.

Plus tard, il s'est résolument engagé contre la guerre en Algérie, en particulier en signant le «Manifeste des 121», ce qui lui a valu en 1961 de perdre son poste de professeur à l'Ecole Polytechnique, qu'il retrouvera environ un an plus tard. Il semble d'ailleurs qu'aucun de ses collègues n'ait accepté alors de prendre sa place.

Il fut profondément choqué par le sort du jeune mathématicien Maurice Audin, arrêté par les parachutistes à Alger en juin 1957, puis «disparu» et probablement assassiné. Schwartz forma alors avec Henri Cartan et d'autres un Comité Maurice Audin et organisa à la Sorbonne la soutenance de la thèse de Maurice Audin «in absentia». Mais le lien de la famille Audin avec les mathématiques ne s'arrête pas là : trente ans plus tard, il y a une Audin mathématicienne distinguée, professeur à Strasbourg, c'est sa fille.

Par la suite il participa au Tribunal de Bertrand Russel pour juger les crimes de guerre américains au VietNam, et soutint par de multiples pétitions et plusieurs visites au VietNam du Nord la cause des insurgés vietnamiens anti-américains.

Enfin, il participa activement au Comité des mathématiciens fondé avec notamment Henri Cartan et Michel Broué, pour dénoncer les emprisonnements ou internements de plusieurs mathématiciens (dont Pliouchtch, Chtcharanski, Massera, Assidon) de nationalités diverses (URSS, Uruguay, Maroc). Les campagnes menées inlassablement par ce Comité conduisirent à plusieurs libérations dont celles de Pliouchtch et plus tard celle de Chtcharanski.

Indépendamment de ses engagements politiques, Schwartz s'est engagé très fermement à

plusieurs reprises dans des combats pour réformer l'université. Tout d'abord, il n'a pas hésité, très tôt, à affirmer haut et fort qu'il était en faveur de la sélection à l'université, quand bien même les mouvements étudiants allaient dans l'autre sens. A l'Ecole Polytechnique, il a constamment agi, dépensant une énergie considérable, pour moderniser et diversifier l'enseignement sous forme d'options offertes aux élèves suscitant ainsi beaucoup plus de vocations scientifiques que par le passé. De plus, il y a créé, en 1965, un centre de recherche en mathématiques qui est maintenant depuis longtemps au tout premier niveau mondial.

Au début des années 1980, il a fondé avec d'autres l'association «Qualité de la Science Française» (QSF) pour lutter contre l'utilisation grandissante de critères non scientifiques dans le recrutement des enseignants, qui aboutissait à un grand nombre de recrutements locaux de qualité discutable. En faisant élire ses représentants dans les diverses instances universitaires, cette association a contribué à assainir la situation à travers la réforme du système de recrutement qui s'ensuivit.

Vers 1981, suite à l'élection du Président Mitterrand, Schwartz a été chargé d'une expertise sur l'université française (dans le cadre de la Commission du Bilan). Parmi les nombreuses recommandations du rapport qui en a résulté, l'une d'elles, la création d'un Comité national d'évaluation des universités a été immédiatement mise à exécution. C'est ainsi que Schwartz est devenu en 1985 le premier Président du CNE dont il avait recommandé la création. Ce comité a été pris très au sérieux par la communauté universitaire, et c'est sans doute désormais une institution bien établie.

S'il fallait résumer Laurent Schwartz d'un seul mot, c'est «rigueur» qui vient à l'esprit: Rigueur mathématique d'un grand mathématicien, cherchant toujours la plus grande généralité pour ses résultats, et perfectionnant sans cesse ses rédactions, Rigueur morale et honnêteté intellectuelle portée à l'extrême d'un citoyen du monde, internationaliste et anticolonialiste intransigeant. Mais ce mot ne décrirait pas la très grande chaleur humaine et la générosité qui émanait de sa personne, car c'était aussi fondamentalement un homme de cœur.

Pour terminer, je voudrais simplement citer une phrase [4] du président actuel de la société mathématique de France, Michel Wladschmidt : «Peu de mathématiciens gagnent leur place dans l'imaginaire collectif national. Laurent Schwartz est l'un d'entre eux.»

Références

[1] L. Schwartz

Un mathématicien aux prises avec le siècle

Ed. Odile Jacob, Paris (1997)

[2] L. Schwartz

Notice sur les travaux scientifiques de Laurent Schwartz

Math. Analysis and applications. (2 Volumes en l'honneur de Laurent Schwartz) Advances in Math. Suppl. Studies, vol. 7A (1981) 1-25

[3] F. Trèves, G. Pisier et M. Yor

Laurent Schwartz (1915-2002)

Notices American Mathematical Society, (Oct. 2003) 1071-1084

[4] Gazette des mathématiciens, Numéro spécial Laurent Schwartz, à paraître en 2004.
210 pages. Soc. Math. France.

[5] J. Lützen

The prehistory of the theory of distributions

Ed. Springer-Verlag, New York-Berlin (1982)

[6] R.F. Streater and A.S. Wightman

PCT, spin and statistics, and all that

(Corrected third printing of the 1978 edition). Ed. Princeton University Press, Princeton, NJ
(2000) x+207 pp.

[7] J. Glimm and A. Jaffe

Quantum Physics

2nd Ed. Springer-Verlag, New-York (1987)

[8] L. Schwartz

Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.

Ed. Hermann, 392 pp., Paris (1961)

[9] L. Schwartz

Semi-martingales sur les variétés et martingales conformes sur les variétés analytiques complexes

Springer lecture Notes 780, 132pp.

Ed. Springer-Verlag, Heidelberg (1980)

[10] L. Schwartz

Les semi-martingales formelles

Séminaire de Probabilités XV. Springer lecture Notes 850, 413-489

Ed. Springer-Verlag, Heidelberg (1981)

[11] L. Schwartz

Semi-martingales banachiques : le théorème des trois opérateurs. Séminaire de Probabilités,
XXVIII, 1--20, Lecture Notes in Math. 1583.

Ed. Springer, Berlin (1994)