LA COURBE DESCENSUS ÆQUABILIS DANS UN MILIEU RESISTANT COMME UNE PUISSANCE QUELCONQUE DE LA VITESSE.

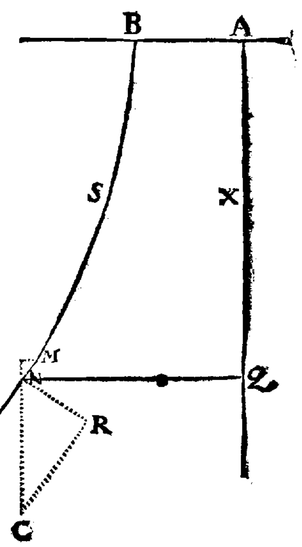
Par M. DE MAUPERTUIS.

I. EN 1687 M. Leibnitz, à l'occaſion de ſa diſpute avec M. l'Abbé Catelan ſur les forces vives, propoſa à ſes adverſaires, de trouver la courbe dans laquelle un corps tombant par la ſeule force de la peſanteur, s'approche également de l'horiſon dans des temps égaux. Par-là il leur faiſoit voir que puiſqu'on peut régler d'une maniere arbitraire le rapport entre les chûtes d'un corps & les temps qu'il emploie à ces chûtes, la conſidération des temps, qui étoit la ſeule reſſource des adverſaires des forces vives, ne devoit en aucune maniere entrer dans l'eſtimation de ces forces. M. Leibnitz vouloit auſſi faire comprendre à M. l'Abbé Catelan que l'Analyſe de Deſcartes ou l'algebre ordinaire n'étoit pas ſuffiſante, comme il le prétendoit, pour réſoudre toutes ſortes de problêmes. *29 Novemb. 1730.*

Ce problême, qui ne fut point réſolu par ceux à qui il étoit propoſé, reçut en 1694 différentes ſolutions des plus célebres Géometres. Au lieu de prendre l'horiſon pour terme des approches du corps, on prit un point quelconque; & Mrs. Bernoulli diſtinguerent leurs ſolutions par les élégantes conſtructions qu'ils donnerent de la courbe *Deſcenſus æquabilis*. Enfin M. Varignon en 1699 donna au Problême une eſpece de généralité, en ne l'aſtreignant ni à l'hypotheſe de Galilée ſur les vîteſſes, ni au rapport d'égalité entre les chûtes & les temps. *Vide Acta Lipſ. 1664.* *V. les Mem. de l'Ac. 1699. & 1703.*

Jusqu'ici tout s'est passé dans le vuide, & nous n'avons aucune solution du problème dans un milieu résistant. On voit assez que cette circonstance doit changer extremement la nature de la courbe *Descens. æquab.* En effet cette courbe qui est la seconde parabole cubique dans le cas proposé par M. Leibnitz, c'est-à-dire, dans le cas où le corps dans le vuide doit s'approcher de l'horison proportionnellement aux temps, cette courbe, dis-je, dans un milieu résistant, comme une puissance quelconque de la vîtesse, devient transcendante du second degré.

II. Comme l'hypothese particuliere d'une résistance proportionnelle au quarré de la vîtesse donne un moyen de trouver cette courbe qui ne seroit pas applicable aux autres hypotheses : je commencerai par chercher la courbe dans cette hypothese, je donnerai ensuite toutes les courbes *Descens. æquab.* pour quelque hypothese de résistance que ce soit.



Soit la courbe que l'on cherche, $BN = s$, $AQ = x$, $QN = y$; la force de la pesanteur $= p$: la vîtesse du corps dans quelque point N de la courbe $= v$.

Le corps tombant dans la courbe BN, sa force accélératrice dépend de deux causes; l'une est la force de la pesanteur, l'autre la résistance du milieu. Pour trouver ce que la pesanteur y contribue, ayant pris la constante NC pour p, je la décompose en deux autres forces, l'une NR perpendiculaire, l'autre RC parallele à la courbe; il est clair que cette derniere seule accélere le corps; ainsi $\frac{p\,dx}{ds}$ est la force accélératrice produite par la pesanteur.

Mais la résistance du milieu s'oppose à cette force, & en doit détruire une partie : or cette résistance étant proportionnelle au quarré de la vîtesse, si l'on prend $\frac{1}{n}$ pour son intensité, l'on aura pour la force retardatrice du corps $\frac{vv}{n}$; & pour la force accélératrice actuelle produite par les deux causes $\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n}$. Or la force accélératrice, multipliée par le temps, donne la différence de la vîtesse; l'on a donc ici $(\frac{pdx}{ds} - \frac{vv}{n})\, ds = vdv$, ou $npdx = vvds + nvdv$.

III. Pour avoir v dans cette équation, je la multiplie par c^{fs} (c étant le nombre dont le logarithme est l'unité, & f un coëfficient que je vais déterminer) j'ai donc $npc^{fx}dx = vvc^{fs}ds + nc^{fs}vdv$, dont l'intégrale est $\int npc^{fs}dx = \frac{1}{f}vvc^{fs} - \frac{2}{f}\int c^{fs}vdv + n\int c^{fs}vdv$. Je cherche maintenant la valeur f propre à faire évanoüir les deux derniers termes, & je trouve $f = \frac{2}{n}$; l'intégrale de l'équation est donc $np\int c^{\frac{2s}{n}}dx = \frac{n}{2}vvc^{\frac{2s}{n}}$, & $vv = \frac{2p}{c^{\frac{2s}{n}}}\int c^{\frac{2s}{n}}dx$.

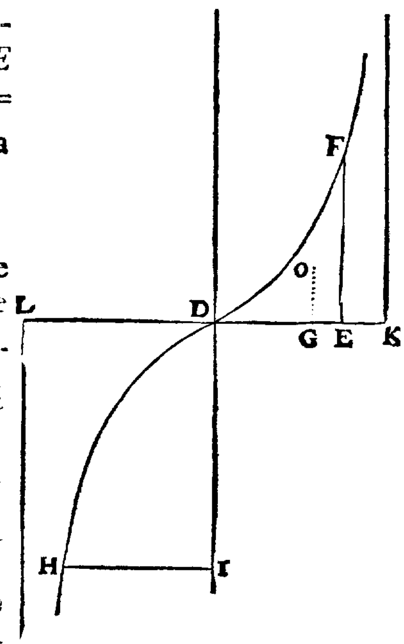
IV. Maintenant puisque dans la courbe que l'on cherche, les descentes verticales doivent être proportionnelles aux temps, l'on a $\frac{ds}{v}$ proportionnel à dx; ou prenant q pour une arbitraire constante $\frac{ds^2}{vv} = \frac{dx^2}{qq}$. Substituant dans cette équation l'expression de la vîtesse, l'on a $\frac{ds^2}{2pc^{-\frac{2s}{n}}\int c^{\frac{2s}{n}}dx} = \frac{dx^2}{qq}$ ou $\frac{c^{\frac{2s}{n}}ds^2}{2pdx^2} = \frac{1}{qq}\int c^{\frac{2s}{n}}dx$. Différentiant cette équation, elle devient $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, qui est l'équation de la courbe *Descens. æquabilis.*

V. Cette équation n'est pas intégrable; cependant on peut construire la courbe par les quadratures, comme l'on va voir.

Dans l'équation $qqdxds^3 + nqqdxdsdds - nqqds^2ddx = npdx^4$, l'on n'a supposé aucune des différentielles constante; si donc on fait $ddx = 0$, l'on aura $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, ou $qq(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + nqqdyddy = npdx^3$.

Si maintenant l'on fait $dy = \frac{zdx}{q}$, $ddy = \frac{dzdx}{q}$; ces valeurs substituées dans l'équation, l'on aura $\frac{dx}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}} + nzdz = npdx$. D'où l'on tire $dx = \frac{nzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$.

Construisant donc la courbe DF, dont l'abscisse $DE = z$, & l'ordonnée $FE = \frac{qnz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.



Faisant ensuite une seconde courbe DH, dont l'abscisse $DI =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI = z =$ l'abscisse DE de la premiere, l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$. Ainsi l'on aura les deux coordonnées de la courbe que l'on cherche.

On peut remarquer que la premiere courbe DI est quarrable par logarithmes : car si l'on fait $qq + zz = tt$, l'on change la premiere expression $\frac{qnzdz}{np - \frac{1}{q}(qq + zz)^{\frac{3}{2}}}$, en $\frac{qqntdt}{npq - t^3}$ qui est intégrable par logarith.

Ayant communiqué cette solution, & cette construction de la courbe à M. Bernoulli, il m'envoya une maniere de perfectionner la construction, qui est digne de son illustre Auteur: je vais la rapporter ici, extraite de sa lettre, sur la permission qu'il m'en a donnée.

Soit O le centre de gravité de l'aire DFE, d'où l'on " abbaisse la perpendiculaire OG: par la nature de ce centre, " on a $DHI = \frac{DFE.DG}{q}$; donc $y = \frac{DHI}{q} = \frac{DFE.DG}{qq}$ " $= \frac{x.DG}{q}$. C'est pourquoi l'on peut passer de l'aire DHI; " car supposant la souscentrique DG donnée dans l'aire donnée " DFE, on trouve la valeur de y, en faisant $q : DG :: x$ " $: \frac{x.DG}{q} = y$; or dans la pratique il est fort aisé de connoître " la souscentrique des figures, en mettant la figure DFE en " situation horisontale sur le tranchant d'un plan vertical pa- " rallele FE, que l'on avance ou recule d'un mouvement tou- " jours parallele jusqu'à ce que la figure DFE soit en équili- " bre; cela fait, la partie DG emportée par le tranchant sera " la souscentrique. "

Voici la démonstration de la construction de M. Bernoulli. L'on a par la nature du centre de gravité $DG = \frac{1}{x}\int z\,dx$; c'est-à-dire (à cause de $x = \frac{DFE}{q}$ & de $y = \frac{DHI}{q}$) $DG = \frac{q}{DFE} DHI$; Donc $DHI = \frac{DG.DFE}{q}$ & $y = \frac{DG.DFE}{qq} = \frac{x.DG}{q}$.

VII. Voilà le problème résolu pour un milieu résistant, comme le quarré de la vîtesse: cette hypothese, outre qu'elle est assez conforme à la nature, a encore pour le calcul cet avantage particulier, qu'on peut trouver en termes finis l'expression de la vîtesse, ce qui n'arrive pas dans les autres hypotheses de résistance proportionnelle à quelqu'autre puissance de la vîtesse.

VIII On peut cependant par une autre méthode se passer de l'expression de la vîtesse, & résoudre le problème en général, pour un milieu qui résisteroit comme une puissance quelconque de la vitesse.

En suivant les mêmes raisonnemens qui ont conduit à l'équation $(\frac{p\,dx}{ds} - \frac{vv}{n})\,ds = v\,dv$, on trouvera dans l'hypothese d'une résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vîtesse $(\frac{p\,dx}{ds} - \frac{v^e}{n^{e-1}})\,ds = v\,dv$.

L'on a de plus par la propriété de la courbe $\frac{ds}{v} = \frac{dx}{q}$; l'on a par cette derniere équation v & $dv = \frac{q\,ds}{dx}$ & $\frac{q\,dx\,dds - q\,ds\,ddx}{dx^2}$; ces valeurs substituées dans la premiere, donnent pour l'équation de la courbe *Descens. æquab.*
$\frac{pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1}}{n^{e-1}} = dx^{e-3}\,(qq\,dx\,ds\,dds - qq\,ds^2\,ddx)$.

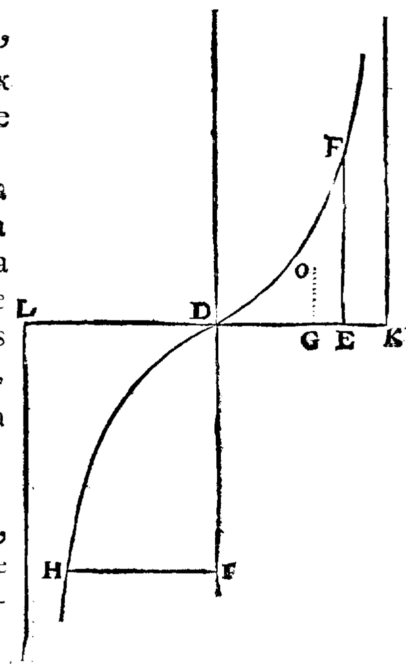
Si l'on fait dx constant, cette équation devient $pn^{e-1}\,dx^{e+1} - q^e\,ds^{e+1} = n^{e-1}\,qq\,dx^{e-2}\,ds\,dds$; ou $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e (dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}qq\,dx^{e-1}\,dy\,ddy$, qui est l'équation de toutes les courbes *Descens. æquab.* pour telle hypothese de résistance que l'on voudra.

IX. Toutes ces courbes sont construisibles par les quadratures : car faisant $dy = \frac{z\,dx}{q}$ $ddx = \frac{dz\,dx}{q}$, & substituant ces valeurs dans la derniere équation, il vient $pn^{e-1}\,dx^{e+1} - q^e (dx^2 + \frac{zz}{qq}dx^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}\,dx^e.z\,dz$. D'où l'on tire $dx = \frac{n^{e-1}\,z\,dz}{p\,n^{e-1} - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{e+1}{2}}}$.

Construisant donc la courbe DF dont l'abscisse $DE = z$; & l'ordonnée $FE = \frac{q\,n^{e-1}\,z}{p\,n^{e-1} - \frac{1}{q}(qq+zz)^{\frac{e+1}{2}}}$, l'on aura $x =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$.

Faisant ensuite la courbe DH, dont l'abscisse $DI =$ l'aire $\frac{DFE}{q}$, & l'ordonnée $HI =$ l'abscisse DE de la premiere, l'on aura $y =$ l'aire $\frac{DHI}{q}$, l'on a donc ainsi les deux coordonnées de la courbe *Descens. æquab.*

X. Ayant l'aire DFE de la premiere courbe, l'on pourra se passer de la seconde par la considération du centre de gravité, comme l'on a vû dans la solution particuliere : car, ayant $x = \frac{DFE}{q}$. l'on aura toûjours $y = \frac{x.\ DG}{q}$.



XI. Si on suppose $n = \infty$, c'est-à-dire, que la résistance du milieu soit nulle, l'équation générale $pn^{e-1}\ dx^{e+1} - q^e(dx^2 + dy^2)^{\frac{e+1}{2}} = n^{e-1}\ qq\, dx^{e-2}\ dy\, ddy$, se réduira à $pdx^3 = qq\, dy\, ddy$, ou $pxdx^2 + padx^2 = \frac{qq}{2} dy^2$; ou $dy = \frac{dx}{q} \sqrt{(2pa + 2px)}$, ou enfin $y = \frac{2\sqrt{2}}{3pq}(pa + px)^{\frac{3}{2}} + b$.

D'où l'on voit que dans le cas d'une résistance nulle, ou dans le vuide, la courbe *Descens. æquab.* est une parabole cubique, comme l'ont trouvé M^s. Leibnitz, Bernoulli & Varignon. Dans ce cas il est évident que les deux courbes DF, DH, sont quarrables.

XII. Dans certaines hypotheses de résistance, l'équation générale de la courbe *Descens. æquab.* se peut ramener aux premieres différences, & même aux quantités finies.

1°. Si par ex. on suppose que le milieu résiste en raison simple directe de la vîtesse du mobile, e sera $= 1$, & l'équation générale deviendra $\frac{dy\,ddy}{(p-q)\,dx^2 - q\,dy^2} = -\frac{1}{qq} dx$, ou

$\frac{2qdyddy}{(p-q)dx^2-qdy^2} = \frac{2}{q}dx$, dont l'intégrale eſt $lAdx^2 - l((p-q)dx^2 - qdy^2) = \frac{2}{q}x$; d'où repaſſant aux nombres, & (prenant c pour le nombre dont le logarithme $=1$), l'on a $\frac{Adx^2}{(p-q)dx^2-qdy^2} = c^{\frac{2}{q}x}$, ou $dy = \frac{dx}{\sqrt{q}} \sqrt{(p-q-Ac^{-\frac{2}{q}x})}$; & faiſant $p=q$, & $-A=BB$, cette équation devient $dy = \frac{B}{\sqrt{p}}c^{-\frac{x}{p}}dx$, dont l'intégrale eſt $y = -Bc^{-\frac{x}{p}}\sqrt{p} + b$, ou $(b-y)c^{\frac{x}{p}} = D$; d'où l'on voit que dans cette hypotheſe, la courbe *Deſcenſ. æquab.* eſt une courbe exponentielle.

2°. Si l'on ſuppoſe que le milieu réſiſte en raiſon doublée de la vîteſſe; l'équation générale ($pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1} qqdx^{e-2}dsdds$) deviendra $qqds^3 + nqqdsdds = npdx^3$, qui eſt la même que nous avons trouvée dans la ſolution particuliere. Cette équation ſe peut ramener aux premieres différences, mais avec des quantités exponentielles: car lui donnant cette forme $\frac{nqqdsdds}{npdx^3-qqds^3} = 1$, & multipliant tout par $\frac{3ds}{n}$, l'on a $\frac{3qqds^2dds}{npdx^3-qqds^3} = \frac{3ds}{n}$, dont l'intégrale eſt $lAdx^3 - l(npdx^3 - qqds^3) = \frac{3s}{n}$, ou repaſſant aux nombres $Adx^3 = c^{\frac{3s}{n}}(npdx^3 - qqds^3)$.

3°. Si l'on ſuppoſe que le milieu réſiſte en raiſon triplée de la vîteſſe du mobile, l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$, deviendra $\frac{dsdds}{pnndx^4-q^3ds^4} = \frac{dx^{-1}}{nnqq}$, ou $\frac{\frac{nn}{q}dx^2dsdds}{\frac{pnn}{q^3}dx^4-ds^4} = dx$, ou $\frac{nndx^2}{q}\left(\frac{2dsdds}{dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})}+ds^2} + \frac{2dsdds}{dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})}-ds^2}\right) : dx^2\sqrt{(\frac{pnn}{q^3})} = 4dx$, dont l'intégrale eſt $n\sqrt{(\frac{q}{p})}.lA(dx^2\sqrt{(\frac{nnp}{q^3})}+ds^2) - l(dx^2\sqrt{(\frac{nnp}{q^3})} - ds^2) = 4x$,

ou

ou repaſſant aux nombres, l'on a $\left(\frac{An\sqrt{p}dx^2+Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2}\right)^{n\sqrt{\frac{q}{p}}}$ $= c^{4x}$ ou $\frac{An\sqrt{p}dx^2+Aq\sqrt{q}ds^2}{n\sqrt{p}dx^2-q\sqrt{q}ds^2} = c^{\left(\frac{4}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)x}$ ou $An\sqrt{p}dx^2$ $+ Aq\sqrt{q}ds^2 = c^{\frac{4x}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}}(n\sqrt{p}dx^2 - q\sqrt{q}ds^2)$.

4°. Si l'on ſuppoſe maintenant que le milieu réſiſte uniformément, on aura $e=0$, & l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1} - q^e ds^{e+1} = n^{e-1}qqdx^{e-2}dsdds$ deviendra $\frac{p}{n}dx - ds = \frac{qqdsdds}{ndx^2}$, ou $pdx - nds = \frac{qqdsdds}{dx^2}$, dont l'intégr. eſt $\frac{2px-2ns+2na}{qq}$ $= \frac{ds^2}{dx^2}$.

5°. Si l'on ſuppoſe que le milieu réſiſte en raiſon ſimple inverſe de la vîteſſe du mobile; l'équation $pn^{e-1}dx^{e+1}$, &c. devient $\frac{p}{nn} - \frac{1}{q} = \frac{qqdsdds}{nndx^3}$, ou $pqdx^3 - nndx^3 = q^3dsdds$, dont l'intégrale eſt $(2pqx - 2nnx + 2nna)dx^2 = q^3ds^2$, ou $(2pqx - 2nnx + 2nna)dx^2 = q^3dx^2 + q^3dy^2$, ou $((2pq - 2nn)x + 2nna - q^3)dx^2 = q^3dy^2$, ou $q^{\frac{3}{2}}dy = dx(\sqrt{(2pq-2nn)x + 2nna - q^3})$ ou $(y+b)$ $q\sqrt{q} = \frac{1}{3pq-3nn}(2pqx - 2nnx + 2nna - q^3)^{\frac{3}{2}}$ équation à la 2^de^ parabole cubique.

Quoiqu'un milieu réſiſtant en raiſon inverſe de la vîteſſe du mobile n'ait point apparemment lieu dans la nature, c'eſt cependant une choſe fort digne de remarque, que la 2^de^ parabole cubique qui eſt dans le vuide la courbe *Deſcenſ. æquab.* la ſoit encore dans cette hypotheſe; il arrive en quelque maniere à cette courbe, ce qui arrive à la cycloïde, qui étant la courbe iſochrone dans le vuide, l'eſt encore dans un milieu réſiſtant en raiſon ſimple directe de la vîteſſe, outre qu'elle l'eſt auſſi dans un milieu dont la réſiſtance feroit uniforme.

Toutes ces hypotheſes de réſiſtance dont nous venons de parler, & pluſieurs autres donneroient des conſtructions particulieres de la courbe *Deſcenſ. æquab.* dont quelques-unes pourroient être plus ſimples que celle que nous avons donnée. Dans l'hypotheſe, par ex. d'une réſiſtance proportionnelle à la ſimple vîteſſe, la courbe ſe peut conſtruire ſans quadrature, par le moyen de la ſeule logarithmique; dans les autres, en quarrant des courbes exponentielles.

Mais j'ai mieux aimé donner une conſtruction générale pour toutes les hypotheſes de vîteſſe, que de détailler toutes ces conſtructions particulieres.

La courbe Descendus Aequabilis dans un milieu résistant comme une puissance quelconque de la vitesse - M. DE MAUPERTUIS
Académie royale des sciences - Année 1730

MATHÉMATIQUE, GÉOMÉTRIE
DE MAUPERTUIS, LEIBNITZ, BERNOULLI, VARIGNON